Devoir surveillé n° 7 (bac blanc)

durée : 4h

Exercice 1 : (*5 points*) **Géométrie, équation du second degré**

Le nombre complexe i est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\pi/2$.

Le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm est noté $\mathcal{P}$.

Les nombres complexes

$$1 + i, \qquad \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{2}$$

sont respectivement notés z_1, z_2 et z_3.

Les points M_1, M_2 et K du plan $\mathcal{P}$ sont les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

1. Placer les points M_1, M_2 et K dans le plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer le module et l'un des arguments de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

3. Montrer que les points M_1 et M_2 sont sur un cercle de centre K dont on déterminera le rayon. Tracer ce cercle dans le plan $\mathcal{P}$.

4. Démontrer que le triangle M_1KM_2 est rectangle.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{8} = 0.$$

Vérifier que le nombre complexe $\dfrac{z_3}{z_1}$ est l'une des solutions de cette équation.

Exercice 2 : (*5 points*) **Équation différentielle d'ordre 2 – Valeur moyenne**

On donne l'équation différentielle : $y'' + 36y = 0$.

1. Donner la forme des solutions de cette équation différentielle.

2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle satisfaisant aux conditions suivantes :

$$f(0) = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 6.$$

3. Vérifier que pour tout x réel :

$$f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \pi/6]$.

Problème : (*10 points*)

– Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire – (*10 points*)

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1;+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}.$$

1. Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.

2. Calculer la limite de la fonction g en 1.

3. *a*) En remarquant que

$$g(x) = 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x},$$

calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b) Déduire de **3.***a*) que la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale en $+\infty$, dont on précisera une équation.

4. *a*) On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1;+\infty[$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction g.)

– Partie B – Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative –

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + \ln(x-1).$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 5 cm.

1. *a*) Calculer la limite de la fonction f en 1.

En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe C, dont on précisera une équation.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. *a*) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}.$$

c) En déduire le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

3. *a*) Calculer $f(2)$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe C dans le repère défini précédemment.

– Partie C – Calcul d'aire –

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$F(x) = -\frac{1}{e^x} + (x-1)\ln(x-1) - \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)x.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

2. *a*) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

b) Donner une valeur de $\mathcal{A}$ en cm^2 à 10^{-2} près.