Devoir surveillé n° 6

durée : 2h

Exercice : Un problème « standard » (*Bac gm, septembre 96*)

– Partie A –

On considère la fonction g de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 2x - 1.$$

Le but de cette première partie est l'étude, pour tout réel x, du signe de $g(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $e^{2x} - 1 \geqslant 0$.

2. *a*) Étudier le sens de variation de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).

b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

– Partie B –

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction f de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm). L'axe des abscisses est noté Ox, celui des ordonnées est noté Oy.

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2. *a*) Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) = (xe^{-x})e^{-x} + e^{-2x} + x + 1.$$

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que la droite Δ, d'équation $y = x + 1$, est asymptote à C_f quand x tend vers $+\infty$.

d) Montrer que si $x \geqslant -1$, alors $f(x) \geqslant x+1$. En déduire la position de la courbe C_f par rapport à Δ lorsque $x \geqslant -1$.

3. *a*) Montrer que la fonction dérivée f' de f est définie, pour tout x réel, par :

$$f'(x) = e^{-2x}g(x).$$

b) Étudier pour tout x réel le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f.

4. *a*) Reproduire et compléter le tableau suivant (donner pour $f(x)$ des valeurs arrondies à 10^{-2}).

x	-2	$-1,5$	$-1,3$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$												

b) Tracer la droite Δ et la courbe C_f dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

– Partie C –

On considère les fonctions H et h, respectivement définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = (x+1)e^{-2x}.$$

1. Vérifier que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. (On donnera la valeur exacte exprimée en cm^2).