Devoir surveillé n° 5

durée : 2h

Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle, bac F1, *1994*

Soit f la fonction numérique définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5 - x - e^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. *a*) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f et donner le tableau de variation.

3. *a*) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 5$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D.

4. Construire $\mathcal{C}$ et D avec précision.

5. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$. On donnera la valeur exacte de cette aire puis la valeur approchée, arrondie au mm^2.

Exercice 2 : Fonction ln : étude et résolution approchée d'équation

On désigne par f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + (x + 1)\ln x.$$

1. *a*) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x$$

(l'étude des limites n'est pas demandée).

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.

2. *a*) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude. Pour la limite en $+\infty$, on pourra vérifier auparavant que l'on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = x(-1 + \ln x) + \ln x.$$

b) Établir que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

En déduire les variations de f.

3. *a*) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. (Justifier.)