Corrigé du devoir surveillé n° 6

Exercice : Un problème « standard » (*Bac gm, septembre 96*)

A **1.** On a

$$e^{2x} - 1 \geqslant 0 \iff \ln\left(e^{2x}\right) \geqslant \ln(1) \iff 2x \geqslant 0 \iff \boxed{x \geqslant 0}$$

2. *a*) On a $g'(x) = 2e^{2x} - 2$, soit $\boxed{g'(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right)}$. Donc g' est du signe de $e^{2x} - 1$, et la question **1.** nous prouve que $\boxed{g'(x) \text{ est positif si } x \text{ est positif, négatif sinon}}$. D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) Comme le minimum de g est $g(0) = 0$, on en déduit que $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

B **1.** On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+1)}_{\downarrow \atop -\infty}\ \underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow \atop +\infty} + \underbrace{x}_{\downarrow \atop -\infty} + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

2. *a*) On vérifie facilement l'égalité proposée en utilisant le fait que $e^{-x} \times e^{-x} = e^{-2x}$.
b) Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{-x})e^{-x} + e^{-2x} + x + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ d'après le cours, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$
c) Pour montrer que Δ est asymptote à C_f, on calcule la limite de la différence entre $f(x)$ et $x + 1$. Il vient alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$$

pour les mêmes raisons qu'à la question précédente. Donc $\boxed{\Delta \text{ asymptote à } C_f \text{ en } +\infty}$.
d) On sait que

$$f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-2x}.$$

Et comme l'exponentielle est toujours positive, cette différence est du signe de $x + 1$, c'est à dire négative pour $x \leqslant -1$ et positive pour $x \geqslant -1$. Autrement dit $\boxed{f(x) \geqslant x + 1 \text{ pour } x \geqslant -1}$, et $\boxed{f(x) \leqslant x + 1 \text{ sinon}}$. En conclusion, $\boxed{C_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ pour } x \geqslant -1 \text{ et en-dessous sinon}}$.

3. *a*) On a $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$, et donc

$$f'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} + 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = -e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 1}$$

Or

$$e^{-2x}g(x) = e^{-2x}\left(e^{2x} - 2x - 1\right) = e^{-2x+2x} - 2xe^{-2x} - e^{-2x} = 1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x}$$

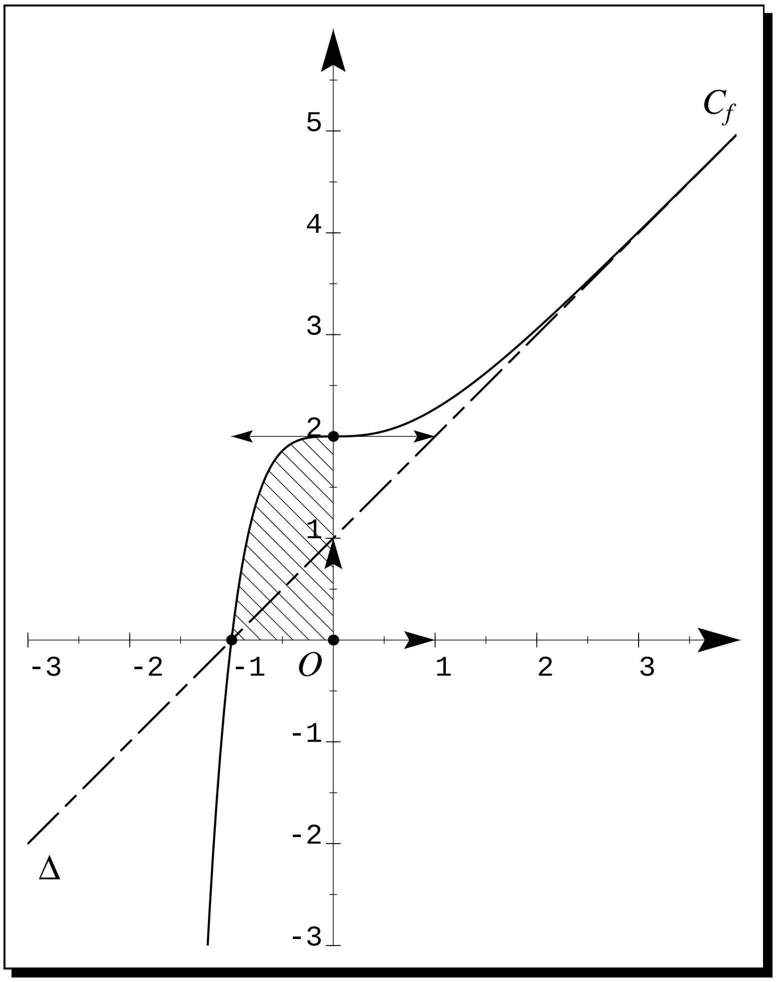
donc on a bien $\boxed{f'(x) = e^{-2x}g(x)}$.
b) L'exponentielle étant toujours positive, on a donc f' qui est du signe de g, et on utilise alors la partie **A.** pour établir le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. *a*) On trouve

x	-2	$-1,5$	$-1,3$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$	$-55,60$	$-10,54$	$-4,34$	-1	0	$1,86$	2	$2,05$	$2,27$	$3,05$	$4,01$	5

b)



C **1.** La fonction H est un produit de fonctions. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ pour obtenir

$$H'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - 2\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-2x}$$

soit $\boxed{H'(x) = h(x)}$. On a bien le fait que $\boxed{H \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. Et comme $f(x) = h(x) + x + 1$, on en déduit qu'une primitive de la fonction f est la fonction F définie par

$$\boxed{F(x) = H(x) + \frac{x^2}{2} + x}$$

3. L'unité d'aire étant de $2 \times 2 = 4\,\text{cm}^2$, l'aire demandée est donnée par le calcul

$$\mathcal{A} = 4 \times \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 4 \times \left[F(x)\right]_{-1}^{0} = 4(F(0) - F(-1)) = 4\left(H(0) - H(-1) - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 4\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{A} = (e^2 - 1)\,\text{cm}^2 \approx 6,39\,\text{cm}^2}$$