Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle, bac F1, *1994*

1. *a*) On a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

b) Pour le calcul de la limite en $-\infty$, on ne peut utiliser l'écriture $f(x) = 5 - x - e^{-x}$ car elle donne une forme indéterminée ($\infty - \infty$). On factorise alors par « le terme dominant » pour écrire

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(5e^x - xe^x - 1) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

puisque $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} 5e^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (formulaire).

2. On trouve $\boxed{f'(x) = -1 + e^{-x}}$. Et

$$f'(x) \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$$

d'où le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

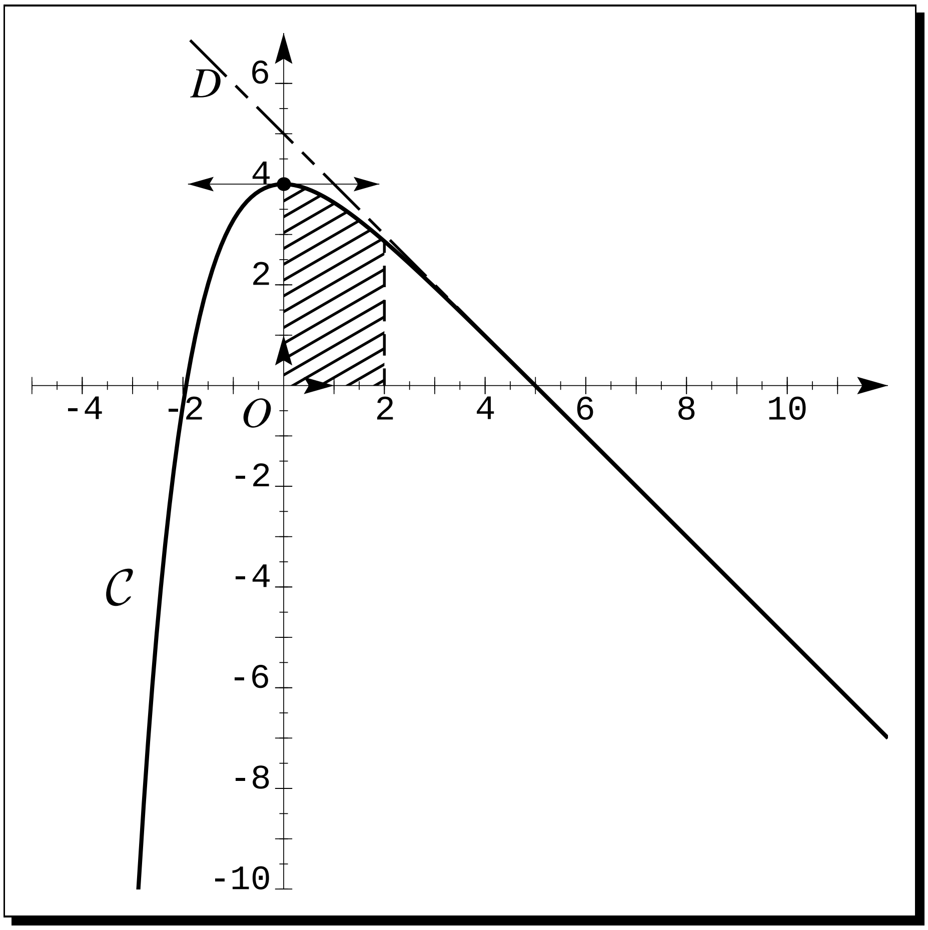
3. *a*) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (-x+5)\big) = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = 0$$

donc $\boxed{D \text{ asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } +\infty}$.

b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D revient à étudier le signe de la différence $f(x) - (-x+5)$. Comme cette différence est égale à $-e^{-x}$ et que l'exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que cette différence est toujours strictement négative, et donc que $\boxed{\mathcal{C} \text{ est toujours en dessous de } D}$.

4.



5. Comme $f(2) = 3 - e^{-2} \approx 2,86$ est positif, on voit sur le tableau de variation que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0, 2]$. L'aire est donc donnée, en unités d'aire, par le calcul de l'intégrale

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 5 - x - e^{-x}\,dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} + e^{-x}\right]_0^2 = 7 + e^{-2}.$$

L'unité d'aire étant de $1 \times 1\ \mathrm{cm}^2$, l'aire cherchée est donc

$$\boxed{\mathcal{A} = 7 + e^{-2}\ \mathrm{cm}^2 \approx 714\ \mathrm{mm}^2}$$

à $1\ \mathrm{mm}^2$ près par excès.

Exercice 2 : Fonction ln : étude et résolution approchée d'équation

1. *a*) En utilisant la formule de dérivation d'un produit de fonctions, on trouve $\boxed{g'(x) = 1 + \ln x}$. On a donc

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

d'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1 - e^{-1} \approx 0,64$	$\nearrow$	

b) Le minimum de g est $1 - e^{-1}$, qui est un nombre strictement positif. On en déduit que $\boxed{g(x) \text{ positif pour } x \in \mathbb{R}}$.

2. *a*) <u>En 0</u> : il faut développer l'expression proposée pour le ver l'indétermination. Il vient

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty} \qquad \text{puisque} \qquad f(x) = -x + x\ln x + \ln x \quad \text{avec} \begin{cases} \lim_{0^+} x = 0 \\ \lim_{0^+} x\ln x = 0 \\ \lim_{0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \quad \text{(cf cours)}$$

<u>En $+\infty$</u> : On vérifie facilement que $f(x)$ est égale à l'expression proposée. On a alors

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \qquad \text{puisque} \qquad f(x) = x(-1 + \ln x) + \ln x \quad \text{avec} \begin{cases} \lim_{+\infty} x = +\infty \\ \lim_{+\infty} -1 + \ln x = +\infty \\ \lim_{+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

b) On trouve

$$f'(x) = -1 + \ln x + \frac{x+1}{x} = -1 + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{x\ln x + 1}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x}}.$$

Comme on a vu précédemment que $g(x)$ était toujours positif, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	
x		$+$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *a*) Sur le tableau de variation, on constate que f est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, et qu'elle **change de signe** sur cet intervalle (elle passe de $-\infty$ à $+\infty$). On en déduit que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha}$ sur $]0; +\infty[$.

b) Plus précisément, après avoir procédé par dichotomie avec une calculatrice, on peut affirmer que

$$\boxed{1,93 < \alpha < 1,94}$$

puisque $f(1,93)$ est négatif alors que $f(1,94)$ est positif.
