Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice : Un problème de bac, *Bac sti gm, 1999*

I **1.** On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2+\ln x}{x} = -\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x+2+\ln x = -\infty.$$

Ce qui prouve que la droite déquation $\boxed{x = 0 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f}$.

2. *a*) En réduisant l'expression proposée au même dénominateur, on vérifie immédiatement que l'on a bien $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}}$.

b) En utilisant l'écritre précédente, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{daprès le cours.}$$

c) Le résultat précédent prouve alors que la droite $\boxed{y = 1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f}$.

3. *a*) Calculons la dérivée à partir de la première écriture de $f(x)$. Il vient :

$$f'(x) = \frac{(1+\frac{1}{x}) \times x - (x+2+\ln x)}{x^2} = \frac{x+1-x-2-\ln x}{x^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}}.$$

b) *c*) Il est clair que $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln x$ puisque x^2 est toujours positif. Or

$$-1-\ln x \geqslant 0 \iff -1 \geqslant \ln x \iff e^{-1} \geqslant x$$

d'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	1

où

$$\begin{aligned} f(e^{-1}) &= 1 + \frac{2}{e^{-1}} + \frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= 1 + 2e - e \end{aligned}$$

soit $\boxed{f(e^{-1}) = 1 + e \approx 3,718}$

II **1.** *a*) On trouve facilement $\boxed{g'(x) = -2/x^2}$, dont le signe est $\boxed{\text{toujours négatif}}$. De plus, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

b) Les limites précédentes nous indiquent deux asymptotes pour la courbe H :

$$\boxed{x = 0 \text{ asymptote verticale}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y = 1 \text{ asymptote horizontale}}$$

2. Il vient facilement $\boxed{f(x) - g(x) = (\ln x)/x}$, qui est du signe de $\ln x$ puisque x est toujours positif sur l'intervalle considéré. Et comme l'étude du signe de cette différence nous donne les positions relatives des courbes C et H, on a le tableau récapitulatif suivant

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$
positions relatives	C au dessous de H		C au dessus de H

tableau qui nous prouve entre autre que le point K d'abscisse 1 est $\boxed{\text{le seul point d'intersection entre } H \text{ et } C}$.

III **1.** La fonction u est de la forme kU^2, donc sa dérivée est $2kU'U$. Il vient donc

$$unu'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \qquad \text{soit} \qquad u'(x) = \frac{\ln x}{x},$$

ce qui prouve que $\boxed{u \text{ est une primitive de } \dfrac{\ln x}{x}}$.

2. L'unité d'aire est de 2 cm $\times$ 1 cm $= 2\,\text{cm}^2$. De plus, étant donné que la courbe C est au dessus de la courbe H pour $x > 1$, on a

$$A(\alpha) = 2 \times \int_1^\alpha f(x) - g(x)\,dx = 2 \times \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x}\,dx = 2 \times \Big[u(x)\Big]_1^\alpha = 2 \times \big(u(\alpha) - u(1)\big) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A(\alpha) = (\ln \alpha)^2}$$

3. On a $\alpha > 1$, donc $\ln \alpha > 0$, or on veut

$$A(\alpha) = 8 \qquad \text{soit} \qquad (\ln \alpha)^2 = 8 \qquad \text{soit} \qquad \ln \alpha = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{puisque } \ln \alpha \text{ positif}$$

d'où $\boxed{\alpha = e^{2\sqrt{2}} \approx 16,9}$.