Corrigé du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 : Complexes, géométrie, centre de gravité

1. On a

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \qquad z_2 = -\sqrt{3} + 3i, \qquad \text{et} \qquad z_3 = \frac{4\sqrt{3}z_2}{9z_1}$$

a) On trouve tout d'abord $\boxed{|z_1| = 2}$ et $\boxed{|z_2| = 2\sqrt{3}}$. D'où

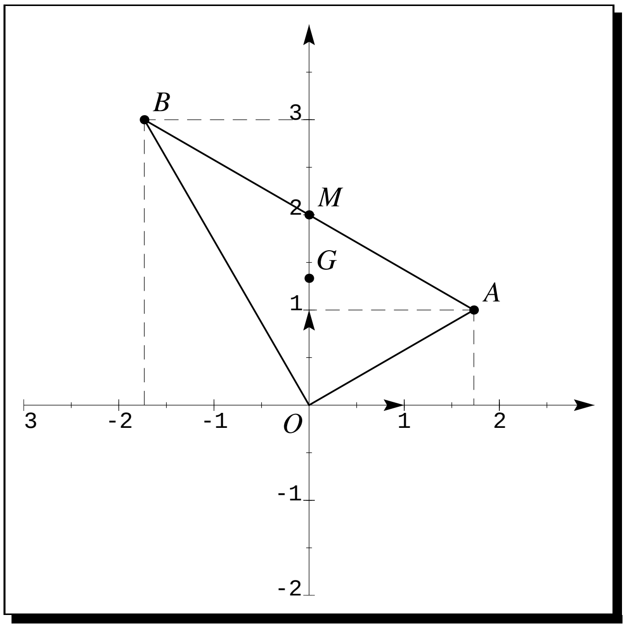
$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta_1 = 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta_1 = \pi/6} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta_2 = -1/2 \\ \sin\theta_2 = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\theta_2 = 2\pi/3}$$

b) En utilisant les formes trigonométriques, on obtient alors pour z_3

$$z_3 = \frac{[4\sqrt{3}, 0] \times [2\sqrt{3}, 2\pi/3]}{[9, 0] \times [2, \pi/6]} = \frac{[24, 2\pi/3]}{[18, \pi/6]} = \left[\frac{4}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \left[\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

d'où $\boxed{|z_3| = \frac{4}{3}}$ et $\boxed{\theta_3 = \frac{\pi}{2}}$. La forme algébrique de z_3 est donc $z_3 = 4i/3$.

2. *a*) Visiblement, le dessin doit se faire avec des valeurs approchées.



b) Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$. On a

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 \times 3 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc orthogonaux et $\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est rectangle en } O}$

autre méthode : On connaît déjà $OA = |z_1| = 2$ et $OB = |z_2| = 2\sqrt{3}$. Ne reste plus qu'à calculer $AB = |z_2 - z_1| = |-2\sqrt{3} + 2i| = 4$, pour pouvoir appliquer Pythagore et conclure.

c) Le milieu du segment $[AB]$ est le point M d'affixe

$$z_M = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \boxed{2i = z_M}$$

d) On connaît les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OG}$:

$$z_{\overrightarrow{OM}} = 2i \qquad \text{et} \qquad z_{\overrightarrow{OG}} = \frac{4}{3}i.$$

On vérifie alors facilement que

$$z_{\overrightarrow{OG}} = \frac{2}{3} z_{\overrightarrow{OM}} \qquad \text{ce qui prouve que} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$

Comme M est le milieu de $[AB]$, on a donc bien $\boxed{G \text{ centre de gravité de } OAB}$ (car situé aux deux tiers de la médiane.)

Exercice 2 : Volume d'une toupie

1. Introduisons la fonction f. Si

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \qquad \text{alors} \qquad f'(x) = \frac{4\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) = f'(x)}$$

Il vient alors

$$f(0) = 4\sin(0) = 0 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } O(0,0)}$$
$$f(3) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } A(3,4)}$$
$$f(5) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \implies \boxed{\Gamma \text{ passe par } B(5,2)}$$
$$f'(3) = \frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \boxed{\Gamma \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3}}$$

Ainsi $\boxed{\text{les 4 conditions sont vérifiées}}$.

2. *a*) **1ère méthode :** on utilise la formule qui donne le volume d'un cône de révolution :

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \qquad \text{soit ici} \qquad \boxed{V_1 = \frac{20\pi}{3}\,\text{cm}^3}$$

2ème méthode : on introduit la fonction g dont la courbe représentative est le segment $[BC]$. Comme c'est un segment de droite, la fonction g est affine et a une écriture de la forme $g(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes réelles. On trouve

$$\boxed{g(x) = -\frac{2}{5}x + 4} \qquad \text{d'où} \qquad V_1 = \pi\int_5^{10}\left(-\frac{2}{5}x+4\right)^2 dx = \pi\int_5^{10}\left(\frac{4}{25}x^2 - \frac{16}{5}x + 16\right) dx$$
$$= \pi\left[\frac{4}{3\times 25}x^3 - \frac{8}{5}x^2 + 16x\right]_5^{10}$$
$$= \pi\left(\left(\frac{160}{3} - 160 + 160\right) - \left(\frac{20}{3} - 40 + 80\right)\right) = \boxed{\frac{20\pi}{3}\,\text{cm}^3}$$

b) On trouve cette linéraisation dans le formulaire : $\boxed{\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)}$. Or le volume V_2 de la partie supérieure du modèle réduit vérifie

$$V_2 = \pi\int_0^5 4^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx = \pi\int_0^5 \frac{16}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right) dx$$
$$= 8\pi \times \int_0^5 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right) dx$$
$$= 8\pi \times \left[x - \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]_0^5$$
$$= 8\pi \times \left(5 - \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(-\frac{3}{\pi}\sin 0\right)\right) = 8\pi\left(5 + \frac{3}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\text{soit} \qquad \boxed{V_2 = \left(40\pi + 12\sqrt{3}\right)\text{cm}^3}$$

3. L'échelle entre le modéle réduit et le modèle réel est de 1 à 3. On a donc 1 cm pour 3 cm, 1 cm^2 pour 3^2 cm^2, et 1 cm^3 pour 3^3 cm^3. D'où le volume de la toupie en vraie grandeur :

$$V = 27 \times (V_1 + V_2)\,\text{cm}^3 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V = (1\,260\pi + 324\sqrt{3})\,\text{cm}^3 \approx 4\,519{,}6\,\text{cm}^3}$$