Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice : Étude d'une fonction rationnelle

1. Il suffit de réduire au même dénominateur l'expression proposée. Il vient

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} = \frac{-2(x-1)^2}{2(x-1)^2} + \frac{2(x-1)}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+4x-2+2x-2+1}{2(x-1)^2}$$

d'où

$$\boxed{-1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} = f(x) = \frac{-2x^2+6x-3}{2(x-1)^2}}$$

2. *a*) Pour la limite de f en $-\infty$, on utilise la première écriture. Il vient alors

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1}$$

puisque

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} 1/(x-1) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} 1/2(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

b) On en déduit une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = -1}$.

c) Pour la limite de f en 1 (en fait en 1^- puisque l'on se situe à gauche de 1 dans l'intervalle $]-\infty; 1[$), on utilise la deuxième écriture. Il vient alors

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty}$$

puisque

$$f(x) = \frac{-2x^2+6x-3}{2(x-1)^2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to1}(-2x^2+6x-3) = 1 \\ \lim_{x\to1^-} 2(x-1)^2 = 0^+ \end{cases}$$

d) On en déduit une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 1}$.

3. *a*) Utilisons l'écriture

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Il vient

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \times \frac{-2}{(x-1)^3} = \frac{-(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{-1}{(x-1)^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^3}}$$

b) Comme par hypothèse on a $x \in]-\infty; 1[$, il vient

$$x < 1 \qquad \text{et donc} \qquad x - 1 < 0$$

donc $(x-1)^3$ topujours négatif sur l'intervalle considéré. d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1
$-x$		$+$		$-$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

4. *a*) Chercher l'intersection de la droite D avec la courbe C_f revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ -1 = f(x) \end{cases}$$

or la deuxième équation se résoud en

$$\begin{aligned} -1 = f(x) &\iff -1 = -1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \iff 0 = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} \\ &\iff 0 = \frac{2(x-1)}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^2} \iff 0 = \frac{2x+1}{2(x-1)^2} \\ &\iff 0 = 2x+1 \end{aligned}$$

d'où l'unique point d'intersection : $\boxed{A\left(\frac{3}{2}; -1\right)}$

b) Étudier les positions relatives de C_f et D revient à étudier le signe de la différence $f(x) - (-1)$. En reprenant les calculs précédents, on voit que

$$f(x) - (-1) = \frac{2x+1}{2(x-1)^2}$$

qui est du signe de $(2x+1)$ puisque le dénominateur est un carré. D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		1
$f(x) - (-1)$		$-$	0	$+$	
	C_f au dessous de D			C_f au dessus de D	

5.