Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 1 : Équation différentielle d'ordre 2 – Équation trigonométrique

1. Résoudre l'équation différentielle
$$9y'' + y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f vérifiant les deux conditions
$$f(0) = -\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Déterminer deux nombres réels r et ω strictement positifs et un réel φ de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tels que, quelque soit le réel x,
$$f(x) = r\cos(\omega x + \varphi).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 : Équation différentielle d'ordre 2

1. Résoudre l'équation différentielle

(E)
$$y'' + 16y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) vérifiant
$$f(0) = \pi \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$$

Exercice 3 : Équation différentielle d'ordre 2 – Équation trigonométrique

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y + 16y'' = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f de cette équation vérifiant
$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(2\pi) = -\sqrt{3}.$$

3. Démontrer que, pour tout réel x, on peut écrire
$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Donner alors la solution sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ de l'équation
$$f(x) = -\sqrt{2}.$$

Exercice 4 : Équation différentielle d'ordre 2

1. Résoudre l'équation différentielle

(E)
$$4y'' + 9y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) vérifiant
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad f'(\pi) = 0.$$

Exercice 5 :

1. Résoudre l'équation différentielle
$$\frac{1}{4}y'' + y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f vérifiant les deux conditions
$$f(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 3\sqrt{2}.$$

3. Déterminer deux nombres réels r et ω strictement positifs et un réel φ de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tels que, quelque soit le réel x,
$$f(x) = r\cos(\omega x + \varphi).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6 : Équation différentielle d'ordre 2 – Calcul de volume

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$.

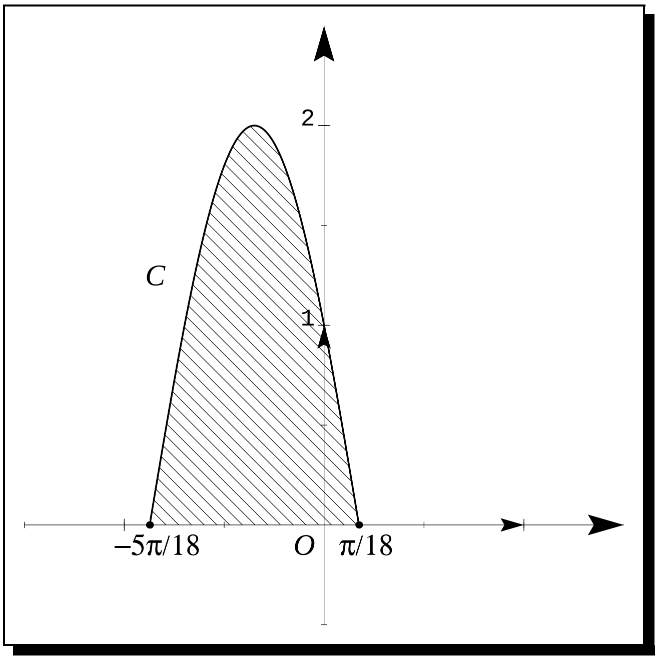
a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

2. *a*) Montrer que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi/3, \pi/3]$ l'équation $f(x) = 0$.

3. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (unité graphique : 3 cm).



On appelle C la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction g définie sur $[-5\pi/18, \pi/18]$ par
$$g(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$ de la partie du plan délimité par l' axe $(O, \vec{\imath})$ et C. On exprimera le résultat en cm^3.