Un problème de bac avec l'exponentielle

Exercice 1 : *ex 107 p 180, Anabac Nathan non corrigé, 2003*

– Partie A –

1. Il vient

$$g'(x) = a - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x e^x}{\left(e^x+3\right)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{g'(x) = a - \frac{12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}}$$

2. Traduisons les hypothèses : C_g passe par H si et seulement si $g(\ln 3) = \ln 3$, et la tangente en H est horizontale si et seulement si $g'(\ln 3) = 0$. Or on a

$$g(\ln 3) = a \ln 3 + b - 2 \qquad \text{et} \qquad g'(\ln 3) = a - 1$$

on a donc facilement $\boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 2}$, soit $\boxed{g(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x+3}}$.

– Partie B –

1. Il suffit de calculer la différence et de montrer qu'elle est nulle. Or

$$x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} - x + 2 - \frac{12}{e^x+3} = 4 - \frac{4e^x+12}{e^x+3} = 0,$$

la dernière égalité étant obtenue par réduction au même dénominateur. On a donc finalement

$$\boxed{x - 2 + \frac{12}{e^x+3} = f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3}}$$

2. On trouve

$$\lim_{x\to+\infty} x - 2 + \frac{12}{e^x+3} = \boxed{+\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^x + 3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{12}{e^x+3} = 0$.

Et

$$\lim_{x\to-\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} = \boxed{-\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)}$$

puisque $\lim_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x + 3 = 3$ et $\lim_{x\to-\infty} 4e^x = 0$.

3. En reprenant les calculs ci-dessus, on montre facilement que l'on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4e^x}{e^x+3} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12e^x}{e^x+3} = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{les droites } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont asymptotes à la courbe } C}$.

Quand aux positions relatives, il faut étudier le signe de ces différences. Une fois remarqué que e^x était toujours positif, il devient évident, au vu des calculs précédents, que $f(x) - (x+2)$ est toujours négatif, alors que $f(x) - (x-2)$ est toujours positif. D'où les positions relatives : $\boxed{D_2 \text{ toujours en dessous de } C}$ et $\boxed{D_1 \text{ toujours en dessus de } C}$

4. Prenons la première expression de f, on trouve alors, en utilisant la formule $(1/u)' = -u'/u^2$,

$$f'(x) = 1 - \frac{12e^x}{\left(e^x+3\right)^2} = \frac{\left(e^x+3\right)^2 - 12e^x}{\left(e^x+3\right)^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{\left(e^x+3\right)^2}}$$

et $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - 6x + 9$ puisque le dénominateur est toujours positif.

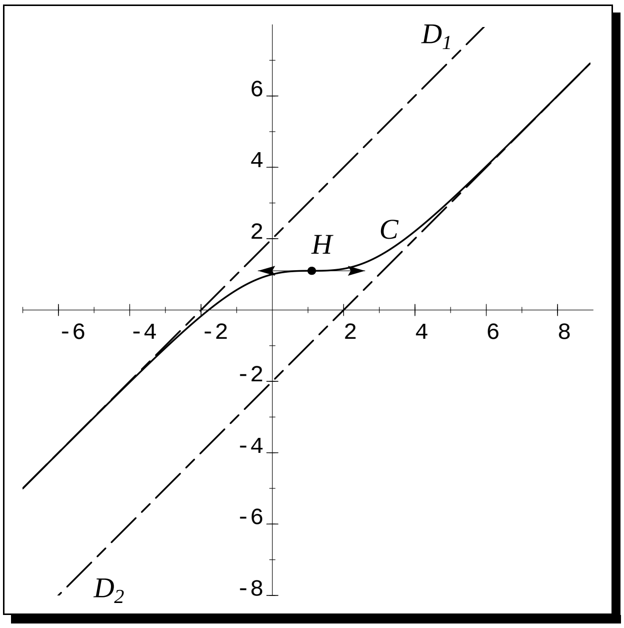
Reste à voir que $e^{2x} - 6e^x + 9 = \left(e^x - 3\right)^2$ pour pouvoir conclure que cette expression est toujours positive ou nulle, et qu'elle ne s'annulle que lorsque $e^x = 3$, c'est à dire quand $x = \ln 3$.

Si on ne s'aperçoit pas immédiatement de l'identité remarquable, alors on va chercher le signe de l'expression $e^{2x} - 6e^x + 9$. Pour ce faire, on utilise le changement de variable $X = e^x$, qui implique $X^2 = e^{2x}$ et on calcule le discriminant Δ de l'expression $X^2 - 6X + 9$ pour trouver $\Delta = 0$, d'où la racine unique $X = 3$ et la factorisation de l'expression en $(X - 3)^2$...

En résumé, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

5. et le graphique :



– Partie C –

1. On reconnaît une expression de la forme u'/u, avec $u(x)$ toujours positif. Une primitive de la fonction h est donc, par exemple, la fonction H définie pour tout réel x par $\boxed{H(x) = \ln(e^x + 3)}$.

2. En reprenant l'expression

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3},$$

on voit que les primitives de la fonction f sont toutes les fonctions F qui s'écrivent

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4H(x) + k \qquad \text{où} \qquad k \text{ est une constante réelle quelconque}$$

Comme $H(0) = \ln 4$, et sachant que l'on veut avoir $F(0) = 2$, on voit qu'il faut prendre $k = 2 + 4\ln 4$. D'où la primitive cherchée :

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4H(x) + 2 + 4\ln 4}$$