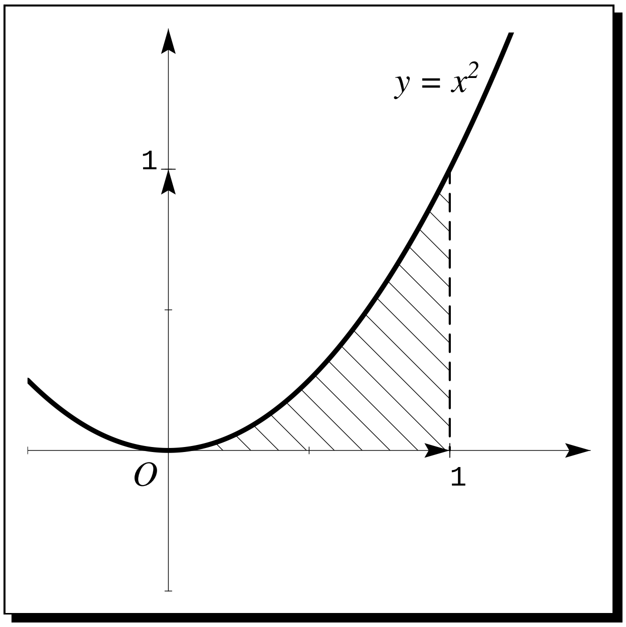
Intégration des fonctions numériques

Exercice 1 : L'aire sous la parabole

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la parabole C d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

Déterminer, en cm^2 l'aire hachurée sur ce dessin.



Exercice 2 : Intersection parabole – droite variable, calcul d'aire

On considère $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit a un réel strictement positif. On note A le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a, et S le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $\frac{a}{2}$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de Σ_A, ensemble des points du plan limité par l'arc de parabole $\widehat{OSA}$ et le segment $[OA]$. (Sur la figure, on a hachuré Σ_A.)

On note $\mathcal{B}$ l'aire du triangle OSA. Le but de l'exercice est de montrer que le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ est constant lorsque le réel a varie dans $]0; +\infty[$.

1. Quelle est l'équation de la droite (OA) ?

2. Soit C la projection orthogonale de A sur l'axe $(x'x)$, et B la projection orthogonale de S sur $(x'x)$.

a) Quelle est, en fonction de a, l'aire du triangle OCA ?

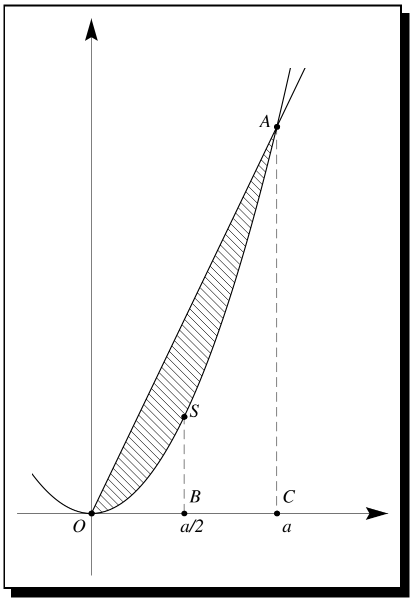
b) Quelle est, en fonction de a, l'aire du triangle OBS ?

c) Quelle est, en fonction de a, l'aire du trapère $BCAS$?

d) En déduire $\mathcal{B}$ en fonction de a.

3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de a.

4. Montrer la propriété cherchée.



Formulaires d'intégration

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	Domaine de validité
k	kx	R
x	$\frac{1}{2}x^2$	R
$x^n, n \in \mathrm{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	R
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathrm{N} - \{1\}$	$\frac{1}{-n+1} \times \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathrm{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	R
$\cos x$	$\sin x$	R
$\sin x$	$-\cos x$	R
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$1 + \tan^2 x$	$\left]-\pi/2, \pi/2\right[$

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	Domaine de validité
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	R
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	R
$u'u^n, n \in \mathrm{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	R
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	où $u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	où $u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathrm{N}^* - \{1\}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	où $u \neq 0$ sur I
$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$	où $u \neq 0$ sur I
$u'u^\alpha, \alpha \in \mathrm{R}^* - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	où $u > 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	