Complexes, géométrie, et second degré

Exercice 1 : Module, argument, application à la géométrie (*bac Gm 97*)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau). On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et z_1 le nombre complexe

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3}.$$

1. On pose $z_2 = iz_1$. Montrer que $z_2 = \sqrt{3} - i$.

2. *a*) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

b) Placer dans le plan $\mathcal{P}$ le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2.

3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}, \qquad z_B = 2 - 2i\sqrt{3}, \qquad \text{et} \qquad z_C = 8.$$

a) Montrer que $z_A = 2\overline{z_1}$ et que $z_B = -z_A$.

b) Placer les points A, B et C dans le plan $\mathcal{P}$.

c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

d) Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 2 : Équations du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$a)\quad z^2 = -16 \qquad\qquad b)\quad z^2 = -3 \qquad\qquad c)\quad z^2 = 5$$

Exercice 3 : Équations du second degré à coefficients réels

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$a)\quad -z^2 + 3z + 1 = 0 \qquad\qquad b)\quad z^2 - 2z + 2 = 0$$

Exercice 4 : Équation du second degré dans $\mathbb{C}$, géométrie. *bac sti gm, sept. 96*

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. *a*) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 4z + 16 = 0.$$

On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 désigne celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Déterminer le module et un argument de chacune de ces solutions.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau). On appelle A et B les points d'affixes respectives z_1 et $i \times z_2$.

a) Calculer $i \times z_2$. En déduire les coordonnées du point B.

b) Sans utiliser de valeurs approchées, placer dans le plan complexe les points A et B (justifier la construction).

3. Soit M un point quelconque d'affixe z dans le plan complexe.

a) Interpréter géométriquement le module $|z - z_1|$ du nombre complexe $z - z_1$.

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan dont l'affixe z est telle que

$$|z - z_1| = |z - iz_2|.$$

c) Construire l'ensemble (Δ) sur la figure.