Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : Èquation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

2. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 2 : Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i, \qquad z_2 = 2 - 2i, \qquad A = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1. a) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.
   b) En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.
2. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.
   Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

Exercice 3 : Du calcul. . .

Déterminer la forme algébrique du complexe $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Exercice 4 : Linéarisation, formules d'Euler

On considère l'expression $E(x)$ définie par

$$E(x) = \cos(x) \times \sin(2x) \times \cos(3x).$$

1. En utilisant les formules d'Euler, montrer que l'expression $E(x)$ peut s'écrire
$$E(x) = \frac{1}{8i}\left(e^{6ix} - e^{-6ix} + e^{4ix} - e^{-4ix} - \left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\right)$$

2. En déduire une écriture de $E(x)$ sous la forme d'une somme de fonctions trigonométriques.