Corrigé du devoir surveillé n° 4 bis

Exercice 1 : Le second membre est constant

1. *a*) L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre (E_0) est

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

Cette dernière équation admettant les 2 solutions réelles $r_1 = 3$ et $r_2 = 1$, on en déduit que la solution générale de (E_0) est la fonction y définie par

$$\boxed{y(x) = Ae^{3x} + Be^x} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ contantes réelles quelconques}$$

b) Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction constante g définie pour tout réel x par $g(x) = a$, où a est une constante réelle à déterminer. On a alors $g'(x) = g''(x) = 0$ pour tout x. Or l'hypothèse « g solution de (E) » impose la condition

$$g'' - 4g' + 3g = 3 \qquad \text{soit} \qquad 3a = 3$$

On en déduit que la fonction constante g définie pour tout réel x par $\boxed{g(x) = 1}$ est une solution particulière de l'équation (E).

c) Pour obtenir la solution générale de (E), il suffit d'additionner la solution générale de (E_0) à une solution particulière de (E). On en déduit la solution générale de (E) :

$$\boxed{y(x) = 1 + Ae^{3x} + Be^x} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques}$$

2. Si f est une solution de (E), on aura donc $f'(x) = 3Ae^{3x} + Be^x$, et les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$ vont alors imposer les relations

$$1 + A + B = -1 \qquad \text{et} \qquad 3A + B = 2.$$

De ces relations, on déduit $(A, B) = (2, -4)$. D'où la seule solution de (E) vérifiant les 2 conditions initiales :

$$\boxed{f(x) = 1 + 2e^{3x} - 4e^x}$$

Exercice 2 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E_0) est $r^2 + 2r + 2 = 0$, équation admettant les 2 racines complexes conjuguées $z = -1 \pm i$. D'où la solution générale de (E_0) :

$$\boxed{y(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles arbitraires}}$$

2. On a

$$\boxed{f'(t) = 4\cos 2t + 2\sin 2t} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f''(t) = -8\sin 2t + 4\cos 2t}.$$

On vérifie lors facilement que $f'' + 2f' + 2f = 10\cos 2t$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est solution particulière de } (E)}$.

3. La solution générale de (E) est donc

$$\boxed{y(t) = 2\sin 2t - \cos 2t + e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles arbitraires}}$$

4. Si maintenant g est une solution de (E), on aura

$$g'(t) = 4\cos 2t + 2\sin 2t + e^{-t}\big((B - A)\cos t - (A + B)\sin t\big).$$

Reste à écrire que g répond aux conditions initiales pour obtenir

$$g(0) = -1 + A = 0 \qquad \text{et} \qquad g'(0) = 4 + B - A = 2$$

d'où l'on tire facilement $(A, B) = (1, -1)$. D'où la solution cherchée : $\boxed{g(t) = 2\sin 2t - \cos 2t + e^{-t}(\cos t - \sin t)}$
