# Corrigé du devoir surveillé n° 4

**Exercice 1 : Le second membre est constant**

**A** **1.** *a*) L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre $(E_0)$ est

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

Cette dernière équation admettant les 2 solutions réelles $r_1 = 3$ et $r_2 = 1$, on en déduit que la solution générale de $(E_0)$ est la fonction $y$ définie par

$$\boxed{y(x) = Ae^{3x} + Be^x} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ contantes réelles quelconques}$$

*b*) Cherchons une solution particulière de $(E)$ sous la forme d'une fonction constante $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = a$, où $a$ est une constante réelle à déterminer. On a alors $g'(x) = g''(x) = 0$ pour tout $x$. Or l'hypothèse « $g$ solution de $(E)$ » impose la condition

$$g'' - 4g' + 3g = 3 \qquad \text{soit} \qquad 3a = 3$$

On en déduit que la fonction constante $g$ définie pour tout réel $x$ par $\boxed{g(x) = 1}$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

*c*) Pour obtenir la solution générale de $(E)$, il suffit d'additionner la solution générale de $(E_0)$ à une solution particulière de $(E)$. On en déduit la solution générale de $(E)$ :

$$\boxed{y(x) = 1 + Ae^{3x} + Be^x} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques}$$

**2.** Si $f$ est une solution de $(E)$, on aura donc $f'(x) = 3Ae^{3x} + Be^x$, et les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$ vont alors imposer les relations

$$1 + A + B = -1 \qquad \text{et} \qquad 3A + B = 2.$$

De ces relations, on déduit $(A, B) = (2, -4)$. D'où la seule solution de $(E)$ vérifiant les 2 conditions initiales :

$$\boxed{f(x) = 1 + 2e^{3x} - 4e^x}$$

**B** **1.** Le calcul de la dérivée $f'$ donne $f'(x) = 6e^{3x} - 4e^x$, soit $\boxed{f'(x) = 2e^x \times (3e^{2x} - 2)}$. Cette dérivée est du signe de $3e^{2x} - 2$ puisque $2e^x$ est toujours positif. Or

$$3e^{2x} - 2 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x} \geqslant \frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x \geqslant \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$$

On en déduit $\boxed{f \text{ décroissante sur } ]-\infty, \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3)]}$, et $\boxed{\text{croissante sinon}}$

**2.** *a*) Pour la limite de $f$ en $+\infty$, il vient

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{3x} \times \left(e^{-3x} + 2 - 4e^{-2x}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty$

*b*) Pour ce qui est de $-\infty$, on a

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - 1\big) = \lim_{x \to -\infty} 2e^{3x} - 4e^x = 0$$

puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote en } -\infty \text{ à la courbe de } f}.$$

Pour étudier les positions relatives de $C_f$ et $\Delta$, il faut étudier le signe de leur diférence. Or on a

$$f(x) - 1 = 2e^{3x} - 4e^{x} = 2e^{x} \times \left(e^{2x} - 2\right)$$

qui est du signe de $e^{2x} - 2$ puisque $2e^{x}$ est toujours positif. En procédant de la même manière que pour l'étude du signe de la dérivée $f'$, on trouve les résultats suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - 2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| positions relatives | | $C_f$ au dessous de $\Delta$ | | $C_f$ au dessus de $\Delta$ | |

$c$) Par définition de la fonction dérivée $f'$, le coefficient directeur de la tangente $T$ est $\boxed{f'(0) = 2}$

**3.** En résumé, le tableau de variation de la fonction $f$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $\approx -1,2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

et voici sa courbe représentative :