BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Intégration des fonctions numériques

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2002/2003

Intégration d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désignera par a et b deux nombres fixés quelconques de l'intervalle I.

1. Introduction

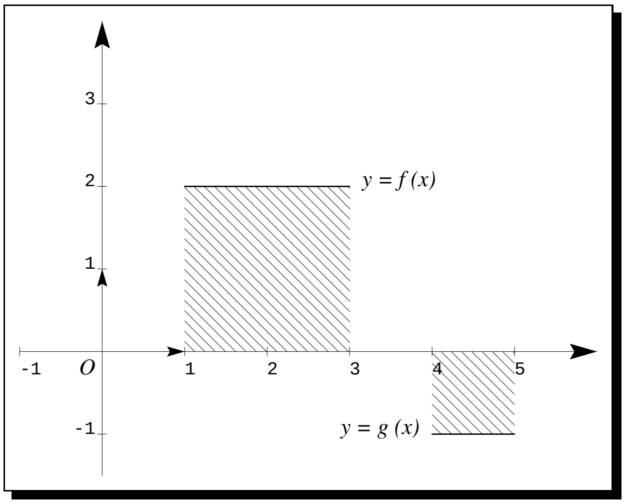
Intuitivement, et historiquement, la notion d'*intégrale* d'une fonction numérique provient de la notion de calcul d'aire. Le problème à l'origine étant de calculer l'aire d'un domaine plan limité par une courbe.

Au fil des siècles, on s'est aperçu que ce problème était exactement l'*inverse* du problème qui consistait à chercher la tangente en un point à une courbe donnée.

Si je devais donner une définition de l'*intégrale d'une fonction sur un segment* à partir de l'approche historique, je donnerais la définition suivante :

> On appelle *intégrale d'une fonction continue f sur le segment* $[a, b]$, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, une mesure *orientée*, en unité d'aire, de l'aire du domaine plan limité par la courbe de la fonction f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
>
> Ainsi, si f et g sont les fonctions constantes respectivement définies par

$$f : [1, 3] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto 2 \qquad \text{et} \qquad g : [4, 5] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto -1$$



$$\text{Alors} \qquad \int_1^3 f(x)\,dx = 4 \qquad \text{et} \qquad \int_4^5 g(x)\,dx = -1$$

Malheureusement, cette définition nous emmènerait dans des méandres calculatoires complexes pour montrer comment on peut calculer une intégrale donnée. Aussi nous partirons de la définition abstraite de l'intégrale à partir des primitives d'une fonction.

2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

On rappelle qu'une *primitive de la fonction f sur I* est une fonction F, dérivable sur I, et telle que

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \in I$$

On admettra que :

- Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur cet intervalle.
- Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors F et G ne diffèrent que d'une constante. Autrement dit, il existe un nombre réel k tel que

$$F(x) - G(x) = k \qquad \text{pour tout } x \in I$$

En vertu du dernier point, on peut donc affirmer que le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f choisie. Il ne dépend que de f et des nombres a et b choisis.

Définitions *Intégrale, Intégrale indéfinie*

• Si F est une primitive de la fonction f, on appelle *intégrale de f sur* $[a, b]$ le nombre $F(b) - F(a)$. On note

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

• Pour désigner une primitive *générique* de la fonction f (c'est à dire un représentant de l'ensemble des primitives de f), on utilise la notation

$$F = \int f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad F = \int f\,dx$$

et on parle de *l'intégrale indéfinie* de la fonction f.

■

Exemple (1) **.**

- $\int_0^3 4\,dt = [4t]_0^3 = 4 \times 3 - 4 \times 0 = 12$
- $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 \frac{x}{3}\,dx = \left[\frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$
- $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$
- $\int dt = [t]$
- $\int \cos t\,dt = [\sin t]$.

■

3. Intégrale dont la borne dépend d'un paramètre

Au vu de la définition de l'intégrale, si f désigne une fonction continue sur l'intervalle I, et si $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est la primitive de la fonction f qui s'annule en a.

Par exemple, si F est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

alors F est la fonction logarithme népérien ln.

4. Quelques propriétés de l'intégrale

4.1 - Relation de Chasles

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, c 3 réels quelconques de l'intervalle I. Alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

■

Exemple (2) **.**

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = \frac{5}{2}$$

■

4.2 - Linéarité et antisymétrie

Théorème *(antisymétrie)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, 2 réels quelconques de l'intervalle I. Alors

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

■

Théorème *(linéarité)*

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit α et β deux réels quelconques. Alors

$$\int_b^a \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_b^a f(x)\, dx + \beta \int_b^a g(x)\, dx$$

■

Exemple (3) **.**

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3\cos t + \sin t)\, dt = 3\big[\sin t\big]_0^{\pi/2} + \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 3 + 1 = 4$

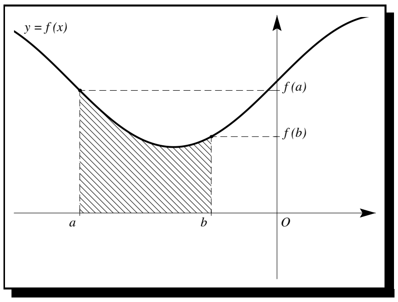
■

5. Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction de signe constant

Si f est en plus une fonction *positive* sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



Si f est de signe constant négatif sur l'intervalle $[a, b]$; alors on a

$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\, dx$$

où $\mathcal{A}$ désigne toujours l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque – l'aire $\mathcal{A}$ est exprimée en unités d'aire. Dans un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité d'aire est l'aire du carré défini par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ du repère.

6. Comparaison d'intégrales

Théorème *Signe de l'intégrale d'une fonction de signe constant*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

i) Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$.

ii) Si $f \leqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \leqslant 0$.

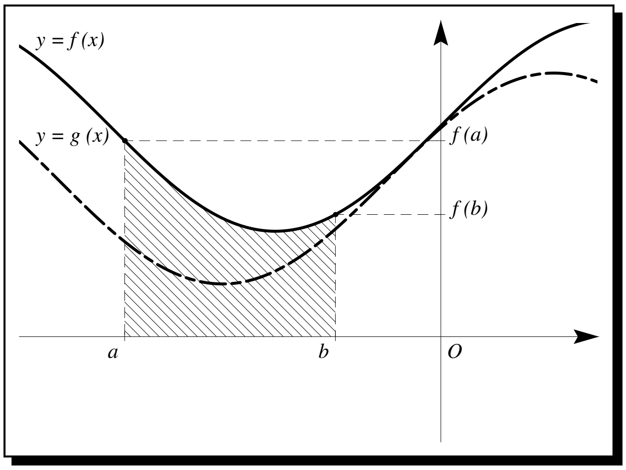
■

Conséquence *Intégration d'une inégalité*

Soit f et g 2 fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$.

$$\text{Si} \quad f \leqslant g \quad \text{sur} \quad I \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$$

■

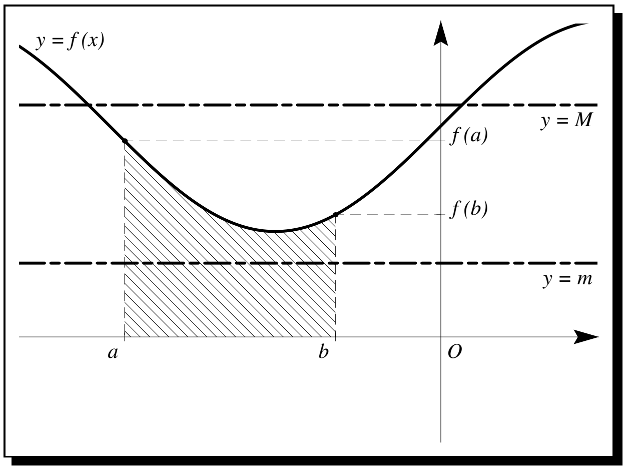


Corollaire *Inégalité de la moyenne*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. S'il exite des réels m et M tels que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{pour tout } x \in I \qquad \text{alors} \qquad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

■



Corollaire *Majoration de la valeur absolue d'une intégrale*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$. S'il existe un réel M tel que

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{pour tout } x \in I \qquad \text{alors} \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M|b-a|$$

■

7. L'inégalité des accroissements finis

Les théorèmes de comparaison d'intégrales permettent d'obtenir des encadrements d'une fonction lorsqu'on sait encadrer sa dérivée.

Théorème *inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction dont la dérivée f' est continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. S'il existe deux réels m et M tels que, pour tout x de $[a, b]$, on ait

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M \qquad \text{alors} \qquad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

En particulier,

$$\text{Si} \quad |f'(x)| \leqslant M \qquad \text{alors} \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$$

■

Ce théorème a de nombreuses applications. La plus classique consiste à l'utiliser lors de l'étude de certains algorithmes de calculs de valeurs approchées de racines d'équations. Il permet de *garantir* la précision apportée après un nombre donné d'itérations. . .

8. Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des dérivées usuelles dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives des fonctions usuelles. Dans le tableau ci-dessous, f est une fonction définie sur un intervalle I, et F est une primitive de f sur I. (Toute fonction G définie par une relation du type $G(x) = F(x) + C$, avec C constante réelle est donc une autre primitive de la fonction f.)

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	Domaine de validité
k	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$\frac{1}{-n+1} \times \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$1 + \tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$

De même, par lecture inverse du tableau des dérivées d'une composée de fonctions, on déduit le tableau ci-dessous (dans lequel on a parfois omis la variable pour des raisons de lisibilité).

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	hypothèse
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a}G(ax+b)$	où g continue sur I et G primitive de g
$u'u^n, n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	où $u\neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	où $u\neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{u^{n-1}}$	où $u\neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	où $u>0$ sur I
$u'u^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	où $u>0$ sur I
$u'e^u$	e^u	

9. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. La dérivée du produit uv est

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{d'où} \qquad u'v = (uv)' - uv'.$$

Les fonctions u et v sont dérivables, donc continues; si de plus u' et v' sont continues, alors les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues, donc intégrables.
Si a et b sont deux éléments de I, on a alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,$$

soit encore, si on choisit uv comme primitive de $(uv)'$,

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt,}$$

Exemple (4) **.**

On désire calculer l'intégrale $I=\int_0^1 te^t\,dt$. On pose $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=t\end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=t\end{cases}$ et il vient

$$\int_0^1 te^t\,dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = e - \left[te^t\right]_0^1 = 1.$$

■

10. Intégration par changement de variable

10.1 - Changement de variable du type $x \mapsto x+\beta$

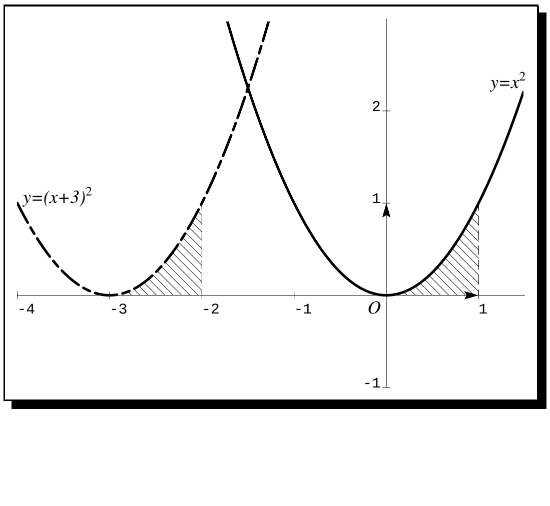
Exemple (5) **.**

On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_{-3}^{-2}(x+3)^2\,dx$.

On peut faire le calcul directement en remarquant que $\frac{1}{3}(x+3)^3$ est une primitive de $(x+3)^2$ sur $[-3,-2]$.

On peut également remarquer que, graphiquement, I représente une mesure de l'aire comprise entre l'axe $0x$ et la courbe C_1 d'équation $y=(x+3)^2$ sur l'intervalle $[-3,-2]$. Or cette aire est la même que celle qui est comprise entre l'axe Ox et la courbe C_2 d'équation $y=x^2$ sur l'intervalle $[0,1]$. (C_2 est déduite de C_1 par une translation de vecteur $3\vec{\imath}$.) On en déduit que

$$I=\int_{-3}^{-2}(x+3)^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



■

En fait, cet exemple se généralise, et on a le

Théorème *(admis)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I du type $I = [a, b + \beta]$ où a, b et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x+\beta)\,dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(x)\,dx}$$

■

10.2 - Changement de variable du type $x \mapsto \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

En tenant un raisonnement du même type, mais avec une multiplication de l'échelle sur l'axe des ordonnées, on montre le

Théorème *(admis)*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\alpha a, \alpha b$, où $\alpha \neq 0$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\,dx}$$

■

Exemple (6) **.**

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

On a $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

■

10.3 - Cas général : changement de variable du type $x \mapsto \varphi(x)$

Théorème *(formule du changement de variable)*

Soit Ψ une fonction numérique dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ dont la dérivée est continue sur I. Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a la formule, dite du « *changement de variable* » :

$$\boxed{\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f\,[\Psi(t)]\,\Psi'(t)\,dt.}$$

■

Appliquer cette formule revient à changer la variable d'intégration. C'est cette formule qui a conduit à l'utilisation du symbole (plûtot compliqué) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour désigner l'intégrale par rapport à la variable x de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple (7) **.**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ en utilisant le changement de variable $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$.

En fait ici, par rapport à la formule précitée, φ désigne la fonction Ψ^{-1}, réciproque sur l'intervalle considéré de la fonction $\Psi : x \mapsto x^2$.

- *On calcule les nouvelles bornes d'intégration.* On pose $x = \sqrt{t}$. La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ est continue et strictement croissante sur $[1, 4]$, avec

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(4) = 2$$

donc, lorsque t varie entre 1 et 4, x varie entre 1 et 2.

- *On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable.* On a

$$\frac{1}{1+\sqrt{t}} = \frac{1}{1+x} \qquad \text{car} \quad \sqrt{t} = x.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue, donc intégrable, sur $[1,2]$.

- *On exprime l'élément différentiel en fonction de la nouvelle variable et de son élément différentiel.* On a $x = \varphi(t)$ et $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. En utilisant les notations différentielles, on a donc

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \qquad \text{d'où} \qquad dt = 2\sqrt{t}\,dx = 2x\,dx \qquad \text{car} \quad \sqrt{t} = x.$$

- Il vient alors

$$\int_1^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_1^2 \frac{1}{1+x} \times 2x\,dx = \int_1^2 \frac{2x}{1+x}\,dx$$

(On a utilisé la formule du changement de variable avec $\Psi = \varphi^{-1} : t \mapsto t^2$.) Reste alors à remarquer que, pour tout élément x de $[1,2]$, on a $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ pour obtenir

$$2\int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx = 2\int_1^2 dx - 2\int_1^2 \frac{dx}{1+x} = 2[x]_1^2 - 2[\ln(1+x)]_1^2 = 2(1+\ln 2 - \ln 3).$$

■

Exercices

1. Calculs de base

Exercice 1 : Premiers calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 2\,dx$

b) $\int_1^2 3x\,dx$

c) $\int_1^3 (x-3)\,dx$

d) $\int_0^1 x^2\,dx$

e) $\int_1^2 x^2\,dx$

f) $\int_1^2 (x^2+3x+1)\,dx$

g) $\int_0^1 4t(t^2+1)\,dt$

h) $\int_0^1 5t(t^2+1)\,dt$

i) $\int_1^2 (x+1)(x^2+2x+3)\,dx$

Exercice 2 : Quelques intégrales simples

Calculer chacune des intégrales suivantes :

a) $\int_0^3 x^2+1\,dx$

b) $\int_3^4 x^2-3x\,dx$

c) $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

Exercice 3 : Quelques intégrales un peu plus « techniques »

a) $\int_1^2 (5x^4-3x^2+4)\,dx.$

b) $\int_1^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\,dx.$

c) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx.$

d) $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx.$

e) $\int_{-2}^1 \left(\frac{14}{(4-x)^3}-\frac{3}{(4-x)^2}\right)\,dx.$

f) $\int_{-2}^1 \sqrt{x+3}\,dx.$

Exercice 4 : Recherche de primitives

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^4+5x^3+3x^2-2$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=(x+1)^3$

d) $f(x)=(2x+3)^4$

e) $f(x)=x(x^2+1)^3$

f) $f(x)=(x^2+\frac{1}{3})(x^3+x)^4$

g) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$

h) $f(x)=\frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$

i) $f(x)=x-\frac{1}{(3x+1)^2}$

j) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+1$

k) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

l) $f(x)=\frac{2}{1-x}$

m) $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

n) $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x-6}$

2. Fonctions trigonométriques

Exercice 5 : Quelques intégrales de fonctions trigonométriques

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x \, dx.$ b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$ c) $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx.$

Exercice 6 : Utilisation du logarithme pour l'intégration

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $B = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx.$

1. Calculer la dérivée de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[\pi/2; 3\pi/4]$ par

$$f(x) = \ln(\sin x - \cos x)$$

où ln désigne le logarithme népérien. (On admettra que f est bien définie sur cet intervalle.)

2. On pose :

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx, \qquad \text{et} \qquad B = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx.$$

a) Calculer $B - A$ et $B + A$.

b) En déduire la valeur de A et celle de B.

3. Des fractions

Exercice 7 : Pôles simples dans $\mathbb{R}$

On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{3t - 14}{t^2 - t - 6} dt.$$

1. *a*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - t - 6 = 0$.

b) En déduire une factorisation de $t^2 - t - 6$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.

2. Déterminer deux constantes a et b telles que, pour tout réel $t \in [0, 1]$, on ait

$$\frac{3t - 14}{t^2 - t - 6} = \frac{a}{t + 2} + \frac{b}{t - 3}.$$

3. Après avoir justifié que la fonction $t \mapsto \frac{3t - 14}{t^2 - t - 6}$ est continue sur $[0, 1]$, calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Remarque – Les nombres -2 et 3 annulant le dénominateur sont appelés **pôles** de la fraction rationnelle. Ils sont dits **simples** car la factorisation du dénominateur où ils interviennent ne comporte que des polynômes du premier degré.
Observez la forme de la décomposition de la fraction rationnelle dans le **2.**, c'est elle qui permet l'intégration de la fraction. Cette forme n'est pas nécessairement donnée dans les énoncés de BTS.

Exercice 8 : Partie entière d'une fraction rationnelle

On se propose de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3} f dx.$$

1. Déterminer trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}.$$

2. Après avoir justifié que la fonction $t \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3}$ est continue sur $[0, 1]$, calculer la valeur exacte de l'intégrale J.

Remarque – Ici, le numérateur de la fraction rationnelle à intégrer possède un degré supérieur à celui du dénominateur, d'où la présence d'un polynôme $ax + b$ dans la décomposition du **1.** : c'est la **partie entière** de la fraction rationnelle. Ici cette fraction n'a qu'un seul pôle : -3, et il est simple.

Exercice 9 : Pôle double dans $\mathbb{R}$

On se propose de calculer l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{2x+5}{(x+1)^2}\,dx.$$

1. Déterminer deux constantes réelles a et b telles que l'on ait, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{2x+5}{(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

2. En déduire le calcul de la valeur exacte de l'intégrale K.

Exercice 10 : Un pôle simple et un pôle double

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2} = \frac{a}{2x+5} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$.

Exercice 11 : Fonction rationnelle et logarithme

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]-2,2[$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(4-x^2).$$

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$:

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}.$$

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$J = \int_0^1 g(x)\,dx = \ln 3 + 2I.$$

En déduire la valeur exacte de J.

4. Des inégalités

Exercice 12 : Obtention de développements limités par intégrations d'inégalités

On se propose ici d'encadrer les fonctions sinus et cosinus par des fonctions polynômes. On procédera par des intégrations successives d'inégalités

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a l'inégalité $-x \leqslant \sin x \leqslant x$.

2. Montrer successivement que pour tout $x \geqslant 0$,

a) $\quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1.$

b) $\quad x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$

c) $\quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}.$

d) $\quad x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}.$

3. *a*) Montrer que les inégalités *a*) et *c*) restent vraies lorsque x est négatif.

b) Quels encadrements de $\sin x$ peut-on déduire des questions précédentes lorsque x est négatif ?

5. Des intégrations par parties

Exercice 13 : Intégration par parties

Calculer les deux intégrales suivantes

$a)\ I = \int_1^2 x \ln x \, dx$ $\qquad b)\ F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$

Vérifier que F est bien la primitive de ln qui s'annule en 1.

Exercice 14 : Facile . . .

Calculer les intégrales suivantes (utiliser une intégration par parties) :

$$\mathbf{1}.\ a)\ \int_0^{\pi} x \sin x \, dx, \qquad \mathbf{2}.\ a)\ \int_1^2 (x+1) \ln x \, dx, \qquad \mathbf{3}.\ a)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

Exercice 15 : Aussi facile . . .

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$$\mathbf{1}.\ a)\ \int_{-1}^0 xe^x \, dx, \qquad \mathbf{2}.\ a)\ \int_{-1}^0 (x+2)e^x \, dx, \qquad \mathbf{3}.\ a)\ \int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1} \, dx.$$

Exercice 16 : Une intégrale un peu problématique

Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3} \, dx$.

1. $a)$ Montrer que pour tout réel x on a

$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

$b)$ Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2} \, dx.$$

2. $a)$ Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

$b)$ Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3} \, dx.$$

Exercice 17 : Intégrations successives

Calculer les intégrales suivantes en utilisant deux intégrations par parties successives :

$$\mathbf{1}.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx, \qquad \mathbf{2}.\ \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx, \qquad \mathbf{3}.\ \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$$

Exercice 18 : Intégration par parties

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I = \int_0^3 (2+x)e^{-x} \, dx.$$

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 19 : Intégration par parties : produit d'une exponentielle et d'un logarithme

1. *a*) Montrer que l'on a pour tout nombre réel x

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

2. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(1+e^x).$$

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx.$$

Exercice 20 :

Calculer $J = \displaystyle\int_2^3 (x-2)e^{x-2}\,dx$ et montrer que $J = 1$. (Il pourra être nécessaire de procéder à une intégration par parties)

Exercice 21 :

Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} 10xe^{-5x}\,dx$ et montrer que $K = 1$. (Il pourra être nécessaire de procéder à une intégration par parties)

6. Valeur approchée d'intégrale

Exercice 22 : Calcul de valeurs approchées d'une intégrale

On considère la fonction f définie sur $]-1,4[$. et l'intégrale J, définies respectivement par

$$f(x) = 2\ln\frac{4(x+1)}{4-x} \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

Le but de ce problème est de calculer l'intégrale J (partie A), puis de calculer des valeurs approchées de J en remplaçant f par des fonctions plus faciles à intégrer (parties B et C). Dans chacun des cas, on évaluera l'erreur relative.

A - Calcul de la valeur exacte de J.

1. *a*) Montrer que l'on a pour tout nombre x de l'intervalle $]-1,4[$

$$f(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) + 4\ln 2.$$

b) Déterminer les limites de f en -1 et en 4.

c) Étudier les variations de f.

2. Tracer C_f, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. *a*) On introduit la fonction auxiliaire F définie pour tout $x > 0$ par

$$F(x) = \int_1^x 2\ln t\,dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = 2(1 - x + x\ln x)$.

b) On considère sur l'intervalle $]-1,4[$ les fonctions h et H définies par

$$h(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) \qquad \text{et} \qquad H(x) = F(x+1) + F(4-x).$$

Montrer que H est une primitive de h sur $]-1,4[$.

c) Calculer la valeur exacte de J.

B - Utilisation d'un polynôme d'interpolation de degré 2.

Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b et c pour que $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$ et $P(2) = f(2)$.
2. On prend désormais
$$P(x) = (-5\ln 2 + 3\ln 3)x^2 + (11\ln 2 - 5\ln 3)x.$$
Calculer $I = \int_0^2 P(x)\,dx$.
3. Calculer $|J - I|$. Donner, à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient
$$\frac{|J - I|}{J}.$$

C - Utilisation d'un polynôme d'interpolation de degré 1.

1. On note T la tangente à C_f au point d'abscisse $3/2$. Déterminer une équation de T sous la forme $y = t(x)$ et placer T sur la figure.
2. On pose $g(x) = f(x) - \frac{8}{5}x + \frac{12}{5} - 4\ln 2$, pour $x \in]-1, 4[$.
   a) Étudier le signe de la dérivée de g.
   b) Étudier le signe de g. Interpréter géométriquement.
   c) Calculer
$$K = \int_0^2 t(x)\,dx.$$
   Donner une interprétation géométrique de la valeur de $|J - K|$.
   d) Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du quotient $\frac{|J - K|}{J}$.

7. Intégrations par changement de variable

Exercice 23 : Changement de variable $x \mapsto x + \beta$

À l'aide du changement de variable $t = x + 1/2$, calculer la valeur exacte de l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{4} + x + x^2}.$$

Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Exercice 24 : Changement de variable $x \mapsto \alpha x + \beta$

On considère l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx.$$

1. Calculer l'intégrale I à l'aide du changement de variable
$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1).$$
2. Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

Exercice 25 : Changement de variable et intégration par parties

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$$

1. *a*) Déterminer les nombres réels A et B tels que pour tout nombre réel t strictement positif, on ait
$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}.$$

b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t(1+t)}$.

2. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

a) En utilisant le changement de variable défini par $t = e^x$, montrer que

$$J = \int_1^e \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt.$$

b) Calculer alors J en utilisant une intégration par parties et le résultat de la question **1.**b).

Exercice 26 : Changement de variable $x \mapsto \alpha x$

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^2+4}$$

en utilisant le changement de variable défini par $x = \dfrac{t}{2}$