Corrigé du devoir surveillé n° 11

Exercice 5 : Des pourcentages. . .

1. Il faut augmenter le prix d'achat chez le grossiste de 20%, ce qui revient à le multiplier par $1,2$. D'où le prix de revente : $120 \times 1,2$, soit $\boxed{144 \text{ euros}}$.

2. Pour obtenir le prix d'achat chez le grossiste par rapport au prix de vente, il suffit de faire l'opération inverse, c'est à dire diviser par $1,2$. On obtient alors un prix de $\boxed{250 \text{ euros}}$ chez le grossite pour un prix de vente de 300 euros.

Exercice 1 : Étude de fonction, résolution graphique d'équation

1. Il est clair que l'on a $\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 4}$ puisque $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

2. Soit a et b deux nombres réels vérifiant $1 \leqslant a \leqslant b$. Il nous faut montrer que $f(a) \leqslant f(b)$. Or

$$\begin{aligned} 1 \leqslant a \leqslant b &\implies 0 \leqslant a-1 \leqslant b-1 \\ &\implies 0 \leqslant (a-1)^2 \leqslant (b-1)^2 \\ &\implies -4 \leqslant (a-1)^2 - 4 \leqslant (b-1)^2 - 4 \quad \implies \quad -4 \leqslant f(a) \leqslant f(b) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1;+\infty[}$.

3. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

4. Chercher l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe Oy revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = -3 \end{cases} \quad \boxed{\text{d'où l'unique point d'intersection : } (0; -3).}$$

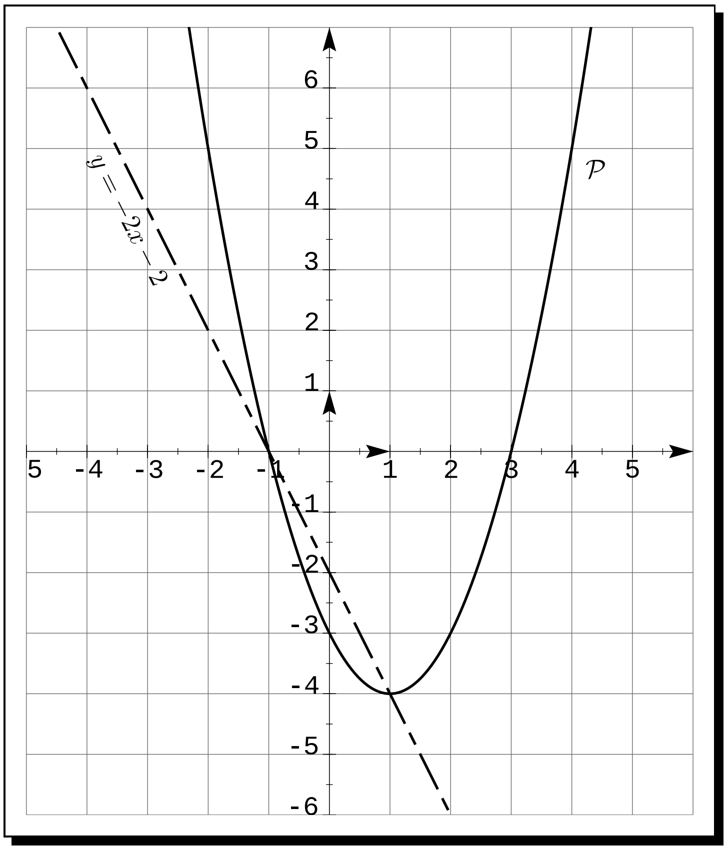
De la même façon, chercher l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe Ox revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ 0 = (x-1)^2 - 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ 0 = (x-3)(x+1) \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \quad \text{ou } x = -1 \end{cases}$$

d'où les $\boxed{\text{deux points d'intersection : } (3;0) \text{ et } (-1;0)}$.

5.

x	-2	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	$-3,75$	-4	$-3,75$	-3	0	5



6. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) > -3$ sont $\boxed{\text{tous les nombres de }]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[}$.

7. Il vient

$$f(x) \geqslant 0 \iff (x-1)^2 - 4 \geqslant 0 \iff (x-1)^2 - 2^2 \geqslant 0 \iff (x-3)(x+1) \geqslant 0$$

Le tableau de signes s'impose, et il vient

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où l'ensemble des solutions : $\boxed{S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[}$

8. Il vient

$$f(x) = -2x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = -2x - 2 \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0$$

D'où les deux solutions : $\boxed{x = 1 \text{ et } x = -1}$.

Graphiquement, résoudre cette équation revient à rechercher

$\boxed{\text{les abscisses des points d'intersection de la courbe } \mathcal{P} \text{ avec la droite d'équation } y = -2x - 2}$.

Exercice 2 : Moyenne, médiane, étendue

1. Du fait de la linéarité de la moyenne, la nouvelle moyenne sera elle même augmentée de 1. Il est relativement clair que la médiane sera également augmentée de 1 alors que l'étendue restera identique (les notes extrêmes devenant 5 et 19). Finalement, on aura

$\boxed{\overline{x} = 10,4}$ $\boxed{= 11}$ et $\boxed{\text{étendue} = 14}$

2. Augmenter les notes de 10% revient à les multiplier toutes par $1,10$. Du fait de la linéarité de la moyenne, la nouvelle moyenne sera elle même multipliée par $1,10$.

Il est relativement clair que la médiane sera également multipliée par $1,1$. En effet, si $a < b < c$, alors $1,1a < 1,1b < 1,1c$.

Quand à la nouvelle étendue, elle sera de $1,1 \times 18 - 1,1 \times 4$.Finalement, on aura

$$\boxed{\overline{x} = 1,1 \times 9,4 = 10,34} \qquad \boxed{= 12,4} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{étendue} = 15,4}$$

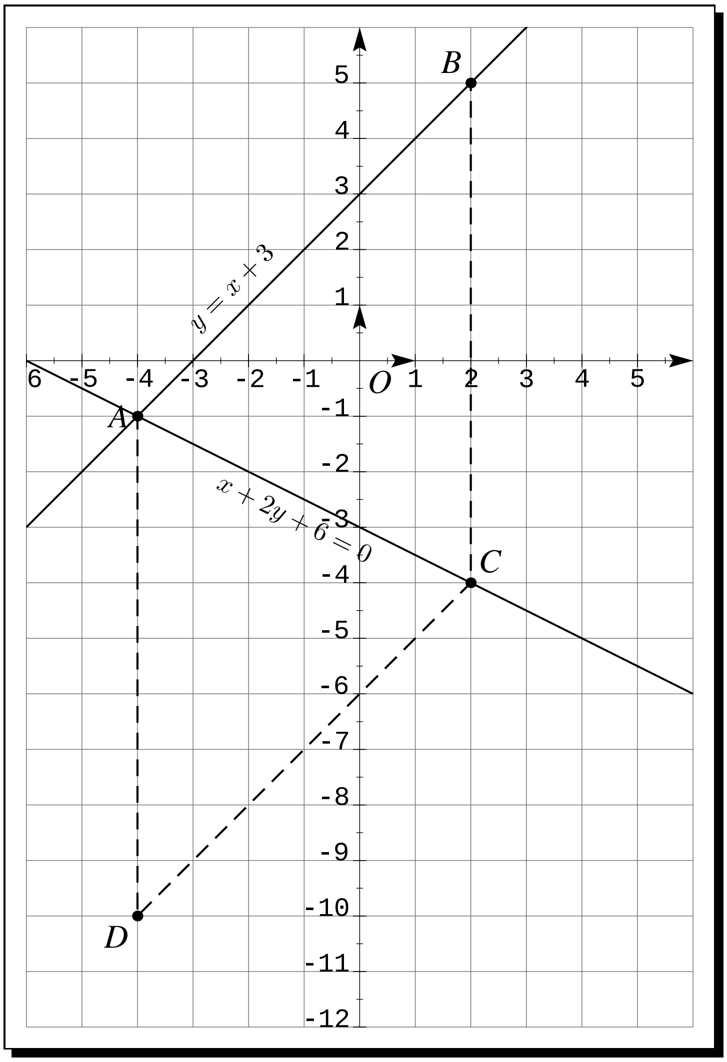
3. Nous avions 31 copies pour une moyenne de $9,4$. La somme des 31 notes était donc $S = 31 \times 9,4 = 291,4$. Avec les deux nouvelles copies, la moyenne sera donc

$$\overline{x} = \frac{S + 8 + 13}{33} = \frac{312,4}{33} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overline{x} \approx 9,46}$$

Et la nouvelle médiane sera $\boxed{= 10}$ puisque, sur les 31 notes de départ, 15 sont inférieures ou égales à 10 et 15 sont supérieures ou égales à 10. Comme $8 < 10$ et $13 > 10$, il est clair que sur le nouvel ensemble de 33 notes, nous en aurons 16 inférieures ou égales à 10 et 16 supérieures ou égales à 10.

Exercice 3 :

1.



Rechercher l'intersection des deux droites (AB) et (AC) revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 3 \\ x + 2(x + 3) + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

d'où les coordonnées du point cherché : $\boxed{A(-4;-1)}$.

2. La condition « B est le point de (AB) d'ordonnée 5 » se traduit par le système

$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\text{les coordonnées cherchées : } B(2;5)}$$

De la même façon, la condition « *C est le point de* (AC) *d'ordonnée* -4 » se traduit par le système

$$\begin{cases} x+2y+6 = 0 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\text{les coordonnées cherchées : } C(2;-4)}$$

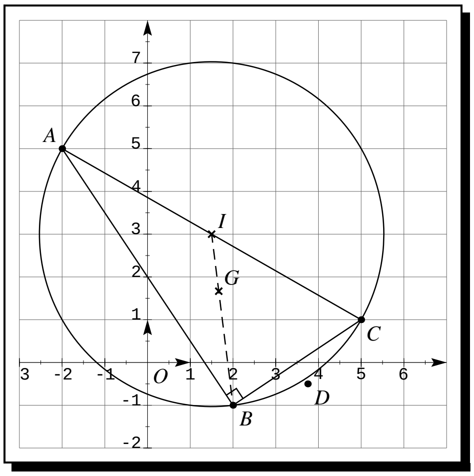
3. Il est immédiat que les abscisses des points B et C sont identiques égaux à 2. La droite (BC) est donc parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est $\boxed{(BC)\ : x = 2}$.

4. Notons $(x;y)$ les coordonnées du point D. Le quadrilatère $BCDA$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{AD}$, d'où le système d'équations

$$\begin{pmatrix} 2-2 \\ -4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+4 = 0 \\ y+1 = -9 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{D(-4;-8)}.$$

Exercice 4 : Triangle rectangle et cercle circonscrit

1.



2. Un rapide calcul de distances nous donne

$$AB = \sqrt{4^2+(-6)^2} = \sqrt{52}, \qquad BC = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad AC = \sqrt{7^2+(-4)^2} = \sqrt{65}$$

La relation de Pythagore nous prouve alors que $\boxed{ABC \text{ rectangle en } B}$.

3. Il vient immédiatement

$$(x_I;y_I) = \left(\frac{-2+5}{2};\frac{5+1}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I\left(\frac{3}{2};3\right)}$$

Quand au centre de gravité G, on sait qu'il est situé aux deux-tiers de chacune de médiane. En particulier, on aura

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$$

En notant $(x;y)$ les coordonnées du point G, on a donc à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3/2-2 \\ 3+1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-2 = -1/3 \\ y+1 = 8/3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5/3 \\ y = 5/3 \end{cases}$$

D'où le point cherché $\boxed{G\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)}$.

4. Dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypothénuse. Ici le centre de notre cercle est donc I, et son rayon est $\frac{1}{2}AC = \sqrt{65}/2$. La surface étant donnée par la formule $S = \pi r^2$, la surface de notre cercle est

$$\boxed{S = \frac{65\pi}{4}\,\text{cm}^2 \approx 51,05\,\text{cm}^2}$$
