Corrigé du devoir surveillé n° 9

Exercice 1 : Droites : un exercice de synthèse

1. *a*) Sur le graphique on lit facilement les deux ordonnées à l'origine : 4 pour d_1 et -4 pour d_2. Quand aux coefficients directeurs, il est facile de voir que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement des vecteurs directeurs des droites d_1 et d_2. D'où les coefficients directeurs cherchés : 1 pour d_1 et -1 pour d_2. Finalement, les 2 équations cherchées sont :

$$\boxed{d_1 \ : y = x + 4} \quad \text{et} \quad \boxed{d_2 \ : y = -x - 4}$$

b) On en déduit sans peine que $\boxed{\text{les droites } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont perpendiculaires}}$ puisque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

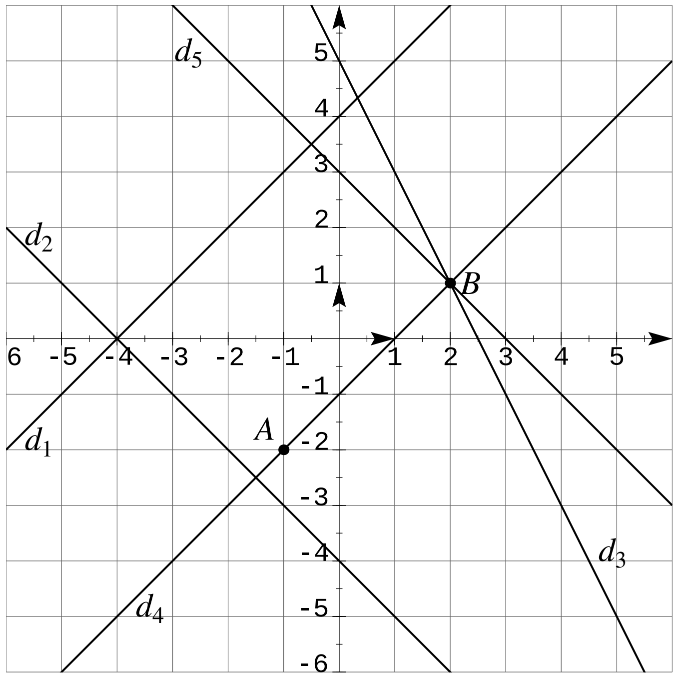
2. *a*) Une équation de d_4 est $2y - 2x + 2 = 0$, et on a bien $2 \times (-2) - 2 \times (-1) + 2 = 0$. Donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite d_4, ce qui prouve que $\boxed{A \text{ appartient à } d_4}$.

b) L'équation réduite de d_1 obtenue dans le **1.** nous donne immédiatement son coefficient directeur : -2. Pour la droite d_4, on a

$$2y - 2x + 2 = 0 \iff 2y = 2x - 2 \iff \boxed{d_4 \ : y = x - 1}$$

d'où le coefficient directeur de d_4 : 1. Ces deux droites ont le même coefficient directeur, ce qui prouve que $\boxed{d_1 // d_4}$

c)



3. Chercher l'intersection des droites d_3 et d_4 revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2y - 2x + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} y + 2x = 5 \\ 2y - 2x = -2 \end{cases} \iff \begin{matrix} (1) \\ (1)+(2) \end{matrix} \begin{cases} y + 2x = 5 \\ 3y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

d'où $\boxed{\text{l'unique point d'intersection} : B(2, 1)}$.

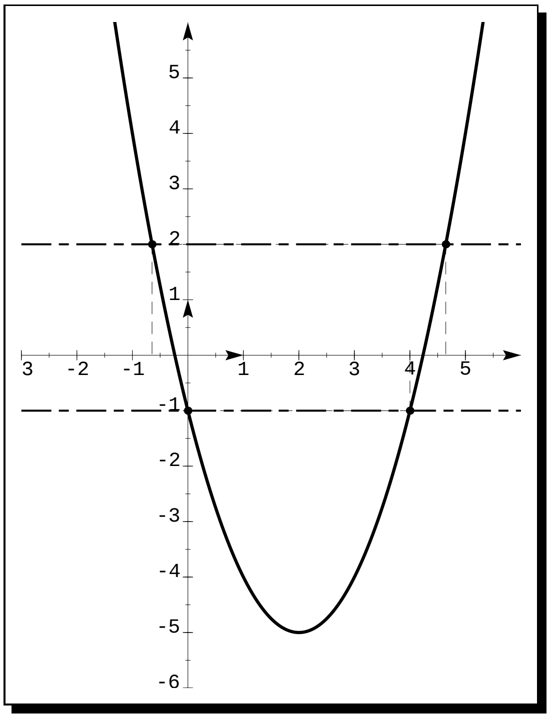
4. Le coefficient directeur de d_4 étant 1 d'après le **2.***b*), celui d'une perpendiculaire à d_4 sera de -1 (produit des coeffs égal à -1). Donc d_5 admet une équation du type $y = -x + p$. Or le point B appartient à d_5, et donc ses coordonnées vérifient l'équation de d_5. D'où la relation $1 = -2 + p$ d'où l'on tire $p = 3$. Finalement, l'équation cherchée est $\boxed{d_5 \ : y = -x + 3}$.

Exercice 2 : Une fonction polynome du second degré

A **1.** On obtient

x	-2	$-1,5$	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3	$3,5$	4
$f(x)$	11	$7,25$	4	-1	$-2,75$	-4	$-4,75$	-5	-4	$-2,75$	-1

2. D'où la courbe :



3. a) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 2$ correspondent aux abscisses des points d'intersections de la courbe d'équation $y = f(x)$ avec la droite horizontale d'équation $y = 2$. D'où les deux solutions : $\boxed{x_1 \approx -0,6 \text{ et } x_2 \approx 4,6}$.

4. a) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -1$ correspondent aux abscisses des points de la courbe d'équation $y = f(x)$ situés en-dessous de la droite horizontale d'équation $y = -1$. D'où les solutions : $\boxed{x \in [0;4]}$
.

B **1.** On trouve $\boxed{f(3) = -4}$ et $\boxed{f(2-2\sqrt{2}) = 3}$.

2. • Dire que le nombre x est un antécédent de 1 par f revient à dire que x est solution de l'équation $f(x) = 1$. D'où la résolution :

$$x^2 - 4x - 1 = -1 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0$$

d'où les $\boxed{2 \text{ solutions : } x = 0 \text{ et } x = 4}$ puisque que l'on a un produit de facteurs égal à zéro.

3. Il vient

$$f(x) \leqslant -1 \iff x^2 - 4x - 1 \leqslant -1 \iff x^2 - 4x \leqslant 0 \iff x(x-4) \leqslant 0$$

d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x-4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

qui permet de conclure : $f(x) \leqslant -1 \iff \boxed{x \in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[}$.

4. a) Même problème qu'à la question **2.** L'équation à résoudre est $\boxed{f(x) = 4}$.

b) Après avoir développé $\boxed{(x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5}$, la résolution de l'équation donne :

$$f(x) = 4 \iff x^2 - 4x - 1 = 4 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \iff (x+1)(x-5) = 0$$

d'où les $\boxed{2 \text{ solutions : } x = -1 \text{ et } x = 5}$ puisque que l'on a un produit de facteurs égal à zéro.