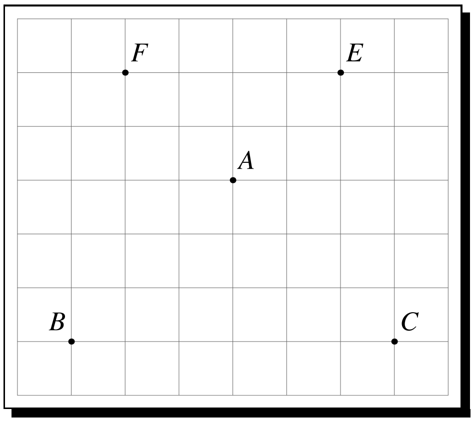
Corrigé du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 : Démontrer avec des vecteurs

1.



2. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\\ &= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}\end{aligned}$$

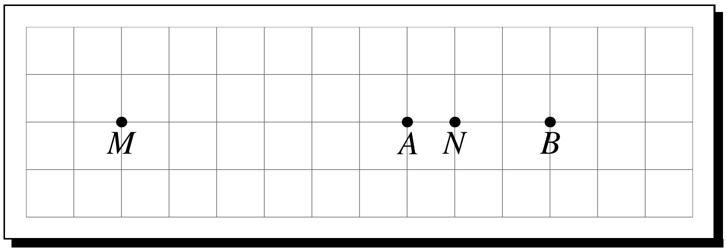
3. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ sont égaux. Ils ont donc en particulier la même direction, ce qui signifie qu'ils sont porté par des droites parallèles. On en déduit que $\boxed{(EF) \parallel (BC)}$.

Exercice 2 : Un problème de construction

On ne peut construire directement les points M et N puisqu'ils apparaissent dans 2 vecteurs distincts. Privilégions le point A par exemple. Il vient :

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{MA} - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \iff \boxed{\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB} \iff \overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) \iff \frac{3}{2}\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$$



Exercice 3 : Calcul vectoriel

1. On lit sur le dessin $\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$, $\boxed{\beta = -\frac{1}{3}}$, et $\boxed{\gamma = \frac{3}{7}}$. Autrement dit, on a

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

2. En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

3. Utilisons encore la relation de Chasles. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\frac{1}{4} + 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \\
&= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7}\right)\overrightarrow{AB} + +\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}. \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}}.
\end{aligned}$$

4. Utilisons maintenant la relation du **2.** et multiplions la par $-9/7$. Il vient

$$-\frac{9}{7}\overrightarrow{PR} = -\frac{9}{7} \times \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{9}{7} \times \frac{-1}{3}\overrightarrow{AC} \qquad \text{soit} \qquad -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR} = \frac{9}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{PQ} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{PR}}.$$

On on conclut que les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{PQ} \text{ et } \overrightarrow{PR} \text{ sont colinéaires}}$, et donc que les points $\boxed{P, Q \text{ et } R \text{ sont alignés}}$.

Exercice 4 : Équation et inéquation rationnelle

1. Il vient

$$g(x) = 3 \iff \frac{2x+1}{x-1} = 3 \iff 2x + 1 = 3x - 3 \iff \boxed{x = 4}.$$

2. L'inéquation est plus difficile puisque le produit en croix est interdit (possible seulement pour les équations, comme à la question précédente). Il ne reste que la solution de réduire au même dénominateur pour comparer à zéro. Il vient :

$$g(x) \geqslant 4 \iff \frac{2x+1}{x-1} - 4 \geqslant 0 \iff \frac{2x+1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{-2x+5}{x-1} \geqslant 0.$$

Un tableau de signes permet alors de conclure :

x	$-\infty$		1		$5/2$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

d'où : $g(x) \geqslant 4$ si et seulement si $\boxed{x \in]1; 5/2]}$.
