Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 : Lecture de graphique

1. *a*) On a $\boxed{f(-1) = 3}$

b) Les antécédents de 2 par f correspondent aux $\boxed{\text{abcisses des points d'intersection}}$ de la courbe de f avec la droite horizontale $y = 1$. Ici, on trouve donc $\boxed{3 \text{ solutions} : x_1 \approx -1,7, x_2 \approx 0 \text{ et } x_3 \approx 1,7}$.

2. *a*) Un point de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de f si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe : $y = f(x)$. Ici, on vérifie facilement que

$$f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$$

ce qui prouve que $\boxed{\text{le point } A \text{ appartient à la courbe de } f}$.

b) Chercher les antécédents de 1 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 1$. On a donc ici à résoudre :

$$x^3 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 3) = 0 \iff x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

Sachant qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on en déduit que le nombre 1 admet $\boxed{3 \text{ antécédents par } f : x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0 \text{ et } x_3 = \sqrt{3}}$.

Exercice 2 : Lecture du graphe d'une fonction numérique

1. *a*) Apparemment, $f(x)$ est $\boxed{\text{toujours positif pour } x \in D}$.

b) On lit sur le graphique $\boxed{f(1) = 0}$ et $\boxed{f(2) = 3}$.

c) On lit deux réels ayant 1 pour image : $\boxed{\sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}}$.

2. On a $f(x) \leqslant 1$ si et seulement si $\boxed{x \in [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]}$

3. Considérons la droite horizontale d'équation $y = a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 2$. Il est clair que, quelle que soit la valeur de a, cette droite possède deux points d'intersection avec la courbe C_f. Or les solutions de l'équation $f(x) = a$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de la droite $y = a$ avec la courbe $y = f(x)$. On en conclut que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = a \text{ admet toujours 2 solutions}}$ si $0 \leqslant a \leqslant 2$.

Exercice 3 : Équation et inéquation polynomiale

1. Il vient

$$f(x) = (3 - 2x)(3 + 2x) - (3 - 2x)(x + 1) = (9 - 4x^2) - (3 + x - 2x^2) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = -2x^2 - x + 6.}$$

2. Il vient

$$f(x) = (3 - 2x)(3 + 2x) - (3 - 2x)(x + 1) = (3 - 2x)\big(3 + 2x - (x + 1)\big) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = (3 - 2x)(x + 2)}$$

3. Le tableau de signes s'impose, et il vient

x	$-\infty$		-2		$3/2$		$+\infty$
$3 - 2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où la réponse : $f(x) > 0$ si et seulement si $\boxed{x \in]-2; 3/2[}$.

Exercice 4 : Inéquation rationnelle

Le tableau de signes s'impose :

x	$-\infty$		$4/7$		$7/4$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$4-7x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

d'où la conclusion :

$$\frac{4x-7}{4-7x} \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in]-\infty; 4/7[\cup [7/4; +\infty[}.$$

Exercice 5 : Équation et inéquation rationnelle

1. Il vient

$$g(x) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x+1 = 3x-3 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = 4}.$$

2. L'inéquation est plus difficile puisque le produit en croix est interdit (possible seulement pour les équations, comme à la question précédente). Il ne reste que la solution de réduire au même dénominateur pour comparer à zéro. Il vient :

$$g(x) \geqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} - 4 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2x+5}{x-1} \geqslant 0.$$

Un tableau de signes permet alors de conclure :

x	$-\infty$		1		$5/2$		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

d'où : $g(x) \geqslant 4$ si et seulement si $\boxed{x \in]1; 5/2]}$.
