BTS groupement B session 2001

durée : 2h

Exercice 1 : (*9 points*) **Pièces métalliques et contrôle de qualité**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dons les cotés sont exprimés en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

– Partie A –

On note E l'événement : « *Une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme* ».

On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,9$.

On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

– Partie B –

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ».

Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$.

On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.

2. Calculer la probabilité pour que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.

3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153.

On admet que les variables M et N sont indépendantes.

Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est $0,914$.

– Partie C –

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.

On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 est $p_2 = 0,879$.

La machine 1 fournit 60% de la production totale des ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.

On définit les événements suivants :

A : « *la pièce provient de la machine* 1 » ;

B : « *la pièce provient de la machine* 2 » ;

C : « *la pièce est conforme* ».

1. Déterminer les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(C|_A)$, $p(C|_B)$.

(On rappelle que $p(C|_A)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)

2. En déduire $p(C \cap A)$ et $p(C \cap B)$.

3. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer $p(C)$.

Exercice 2 : (*11 points*) **Équation différentielle et étude de fonction**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – *Résolution d'une équation différentielle* –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{2x}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la confition $f(0) = -1$.

– Partie B – *Étude d'une fonction* –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au *b*).

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

– Partie C – *Calcul intégral* –

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$.

Démontrer que

$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

2. *a*) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

b) À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Annexe