BTS groupement B, session 2001
Proposition de corrigé

Exercice 1 : Pièces métalliques et contrôle de qualité

A **1.** Dans l'expérience considérée, les 10 tirages sont **indépendants**. De plus, l'expérience ne comporte que **2 issues possibles** (conforme ou non). On en conclu que $\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{B}(10; 0,9)}$.

2. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 8) &= p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= C_{10}^{8}(0,9)^8(0,1)^2 + C_{10}^{9}(0,9)^9(0,1) + C_{10}^{10}(0,9)^{10} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \geqslant 8) \approx 0,930} \end{aligned}$$

Le calcul des C_n^p ayant donné

$$C_{10}^{8} = \frac{10 \times 9 \times \cdots \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \qquad C_{10}^{9} = \frac{10 \times 9 \times \cdots \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$$

B **1.** Si M suit la loi normale $\mathcal{N}(250; 1,94)$, alors la variable T_1 définie par $T_1 = \dfrac{M - 250}{1,94}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient donc

$$\begin{aligned} p(246 \leqslant M \leqslant 254) &= p\left(\frac{246 - 250}{1,94} \leqslant \frac{M - 250}{1,94} \leqslant \frac{250 - 254}{1,94}\right) \\ &= p\left(\frac{-4}{1,94} \leqslant T_1 \leqslant \frac{4}{1,94}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{4}{1,94}\right) - 1 \approx 0,960\,6 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p(246 \leqslant M \leqslant 254) \approx 0,961} \end{aligned}$$

2. Si N suit la loi normale $\mathcal{N}(150; 1,52)$, alors la variable T_2 définie par $T_2 = \dfrac{N - 150}{1,52}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Il vient donc

$$\begin{aligned} p(147 \leqslant M \leqslant 153) &= p\left(\frac{147 - 150}{1,52} \leqslant \frac{N - 150}{1,52} \leqslant \frac{153 - 254}{1,52}\right) \\ &= p\left(\frac{-3}{1,52} \leqslant T_2 \leqslant \frac{3}{1,52}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{3}{1,52}\right) - 1 \approx 0,951\,2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{p(147 \leqslant N \leqslant 253) \approx 0,951} \end{aligned}$$

3. Désignons respectivement par E_1 et E_2 les événements :

E_1 : « *la longueur est comprise entre* 246 *et* 254 » ;

E_2 : « *la largeur est comprise entre* 147 *et* 153 ».

Les variables M et N étant indépendantes, les événements E_1 et E_2 le sont également. On en déduit donc la probabilité cherchée :

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \times p(E_2) = 0,961 \times 0,951 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(E_1 \cap E_2) \approx 0,914}.$$

C **1.** Étant donné que $B = \overline{A}$, la lecture directe des hypothèses donne immédiatement

$$\boxed{p(A) = 0,6} \qquad \boxed{p(B) = 0,4} \qquad \boxed{p(C|_A) = 0,914} \qquad \boxed{p(C|_B) = 0,879}$$

2. Il vient alors

$$p(C \cap A) = p(A) \times p(C|A) = 0,6 \times 0,914 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(C \cap A) \approx 0,548}$$

et, de la même façon,

$$p(C \cap B) = p(B) \times p(C|B) = 0,4 \times 0,879 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(C \cap B) \approx 0,352}$$

3. On admet que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$. En remarquant que les ensembles $C \cap A$ et $C \cap B$ sont disjoints puisque $A \cap B = \emptyset$, il vient

$$p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap B) = 0,548 + 0,352 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(C) = 0,9}.$$

Exercice 2 : Équation différentielle et étude de fonction

A **1.** Le cours nous donne immédiatement la solution générale de (E_0) : $\boxed{y = ke^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}}$.

2. Si $h = xe^{2x}$, alors $h' = (1+2x)e^{2x}$ et $h' - 2h = e^{2x}$, ce qui prouve que $\boxed{h \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

3. On déduit alors des questions précédentes que la solution générale de (E) est $\boxed{y = (x+k)e^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}}$.

4. La fonction f étant une solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$, on obtient immédiatement $f(0) = k = -1$, autrement dit $\boxed{f(x) = (x-1)e^{2x}}$.

B **1.** *a*) On a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ puisque $f(x) = (x-1)e^{2x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}$.

b) et on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$ puisque $f(x) = xe^{2x} - e^{2x}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}$.

c) On en déduit une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0}$.

2. *a*) *b*) Il vient

$$f'(x) = \big(2(x-1)+1\big)e^{2x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = (2x-1)e^{2x}}$$

qui est du signe de $2x-1$ puisque e^{2x} est toujours strictement positif. D'où $\boxed{f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1/2}$.

c) On a finalement le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *a*) On sait que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

donc

$$\boxed{e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$$

b) En multipliant ce dernier développement par le polynôme $x-1$, on obtient alors

$$\begin{aligned}(x-1)e^{2x} &= (x-1)\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.\\ &= -1 + (1-2)x + (2-2)x^2 + \left(2 - \frac{4}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

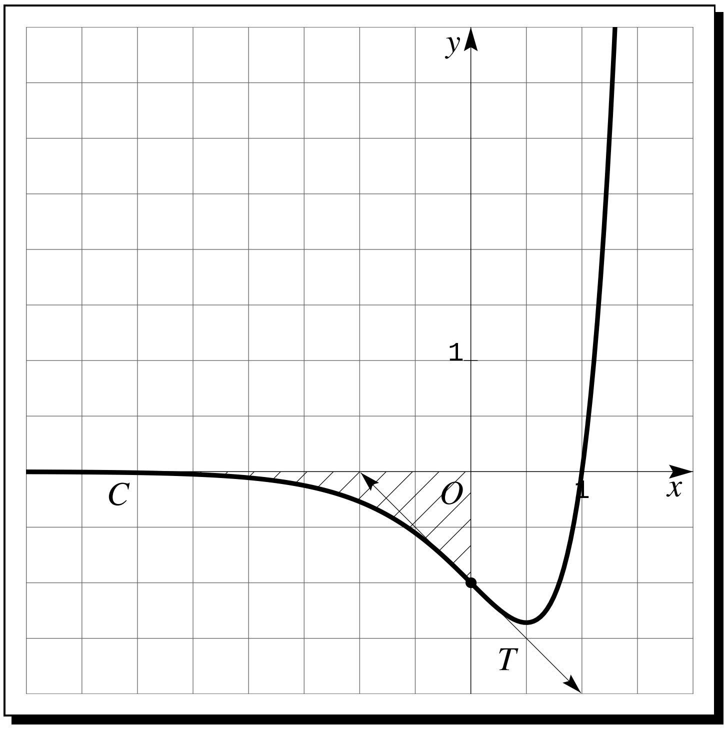
soit encore $\boxed{f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$

c) Ce développement donne immédiatement, non seulement une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 : $\boxed{T \ : y = -1 - x}$, mais aussi la différence entre la courbe C et la tangente T au voisinage de 0. Ainsi

$$f(x) - (-1 - x) = \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Au voisinage de 0, cette différence est donc du signe de $2x^3/3$. Ce qui nous permet d'affirmer que, au voisinage de $x = 0$, la courbe C est $\boxed{\text{en dessous de } T \text{ pour } x < 0, \text{ au dessus sinon}}$.

d)



$\boxed{\text{C}}$ **1.**

$$I(\alpha) = \int_\alpha^0 (x-1)e^{2x}\,dx \qquad \text{du type} \qquad \int UV' \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} U = x-1 \\ V' = e^{2x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

D'où

$$I(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}\right]_\alpha^0 - \frac{1}{2}\int_\alpha^0 e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha-1)e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}}.$$

2. *a*) Et, de la même façon qu'au **B-1.***b*), il vient $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \frac{-3}{4}}$ puisque

$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} - \frac{3}{4}e^{2\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to-\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0 = \lim_{x\to-\infty} e^{2\alpha}$$

b) Graphiquement, ce dernier résultat signifie $\boxed{\text{qu'une mesure de l'aire } \mathcal{A} \text{ est } 3/4 \text{ d'unités d'aire}}$, où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du domaine plan infini délimité par la courbe C et les axes Ox et Oy.