Brevet de Technicien Supérieur – groupement B
Session 1999

Exercice 1 : Production industrielle et contrôle de qualité

1. La variable L suit la loi normale $\mathcal{N}(300, 3)$, donc la variable T définie par $T = (L-300)/3$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(293,5 \leqslant L \leqslant 306,5) &= p\left(\frac{293,5-300}{3} \leqslant \frac{L-300}{3} \leqslant \frac{306,5-300}{3}\right) \\ &= p(-2,16 \leqslant T \leqslant 2,16) \\ &= 2\Pi(2,16) - 1 \qquad \text{vu la symétrie de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\ &= 2 \times 0,984\,6 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(293,5 \leqslant L \leqslant 306,5) = 0,969\,2} \end{aligned}$$

2. • $p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ puisque A et B sont indépendants. D'où $p(E_1) = 0,03 \times 0,07$, soit $\boxed{p(E_1) = 0,002\,1}$.

• $p(E_2) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,03 + 0,07 - 0,021$, soit $\boxed{p(E_2) = 0,097\,9}$.

• $p(E_3) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,097\,9$, soit $\boxed{p(E_3) = 0,902\,1}$.

3. *a*) On a 10 tirages indépendants, pour seulement 2 issues possibles (E_3 ou $\overline{E_3}$), on est bien dans le cadre d'une loi binômiale. Donc X suit la $\boxed{\text{loi binômiale } \mathcal{B}(10; 0,902)}$.

b) Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 9) &= p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= C_{10}^{9}(0,902)^9 \times (0,098)^1 + C_{10}^{10}(0,902)^{10} \times (0,098)^0 \\ &= 10 \times (0,902)^9 \times (0,098) + (0,902)^{10} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \geqslant 9) = 0,744} \end{aligned}$$

4. La variable $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0,084/\sqrt{60})$, et la moyenne sur un échantillon donné est $\overline{x} = 4,012$.

a) L'estimation ponctuelle est $\boxed{\mu = 4,012}$.

b) On veut trouver le réel positif a tel que $p(\overline{x} - a \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + a) = 0,95$. Introduisons la variable $\overline{T}$ définie par

$$\overline{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{0,084} \times \sqrt{60},$$

alors $\overline{T}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et l'on sait que pour tout réel positif t on a

$$p(-t \leqslant \overline{T} \leqslant t) = 2\Pi(t) - 1.$$

Un coup d'œil sur le formulaire nous montre qu'il faut choisir $t = 1,96$ pour obtenir une probabilité de $0,95$. Autrement dit, on sait que l'on a

$$\begin{aligned} p\left(-1,96 \leqslant \frac{\sqrt{60}}{0,084}\left(\overline{X} - \mu\right) \leqslant 1,96\right) &= 0,95 \\ &= p\left(-1,96 \times \frac{0,084}{\sqrt{60}} \leqslant \overline{X} - \mu \leqslant 1,96 \times \frac{0,084}{\sqrt{60}}\right) \\ &= p(-0,021 - \overline{X} \leqslant -\mu \leqslant 0,021 + \overline{X}) \\ &= p(0,021 + \overline{X} \geqslant \mu \geqslant -0,021 - \overline{X}) \end{aligned}$$

D'où ici l'intervalle de confiance à 95% cherché : $\boxed{I = [3,991\,; 4,033]}$.

c) Bien sûr, $\boxed{\text{l'affirmation proposée est fausse}}$: avec un intervalle de confiance à 95% on est encore très loin d'une certitude. . .

Exercice 2 : Équation différentielle

A **1.** L'équation caractéristique associée à l'équation (E') est $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette dernière admet la racine réelle double $r = 1$. On en déduit que les solutions de l'équation (E') sont toutes les fonctions y ayant une écriture du type

$$\boxed{y(x) = e^x(Ax + B), \qquad \text{où} \qquad A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

2. Si $g(x) = ax^2 + bx + c$, alors $g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$. En reportant dans l'équation différentielle (E), on voit que g est solution de (E) si et seulement si

$$(2a - 2b + c) + (b - 4a)x + ax^2 = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$$

autrement dit, en identifiant les coefficients dans chacun des deux membres, si et seulement si le triplet (a, b, c) est solution du système

$$\begin{cases} 2a - 2b + c = -1 \\ b - 4a = -1 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

Finalement, on trouve $(a, b, c) = (1/2, 1, 0)$ et la solution particulière cherchée est $\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x}$.

3. Pour avoir la solution générale de (E), il suffit d'additionner la solution générale de (E') et la solution particulière de (E). Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions y ayant une écriture du type

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + e^x(Ax + B), \qquad \text{où} \qquad A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

4. En écrivant que la fonction f est une solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = e + 3/2$, il vient $B = 0$ (puisque $f(0) = B$) et $A = 1$ (puisque $f(1) = Ae + 3/2$), d'où la solution cherchée

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + xe^x}.$$

B **1.**On a clairement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$. De plus $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ puisque $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Et comme $f(x) - g(x) = xe^x$, il vient également $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - g(x)\right] = 0}$, ce qui signifie géométriquement que $\boxed{\text{les courbes } \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{P} \text{ sont asymptotes en } -\infty}$

2. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x) = xe^x$. Cette différence est bien entendu du signe de x puisque e^x est toujours positif. On a donc

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ en dessous de } \mathcal{P} \text{ sur }]-\infty, 0]}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{C} \text{ en dessus de } \mathcal{P} \text{ sur } [0, +\infty[}.$$

3. a) On vérifie facilement que $\boxed{f'(x) = (x + 1)(1 + e^x)}$.

b) Et comme $1 + e^x$ est toujours positif (comme somme de nombres positifs), on a $f'(x)$ du signe de $x + 1$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

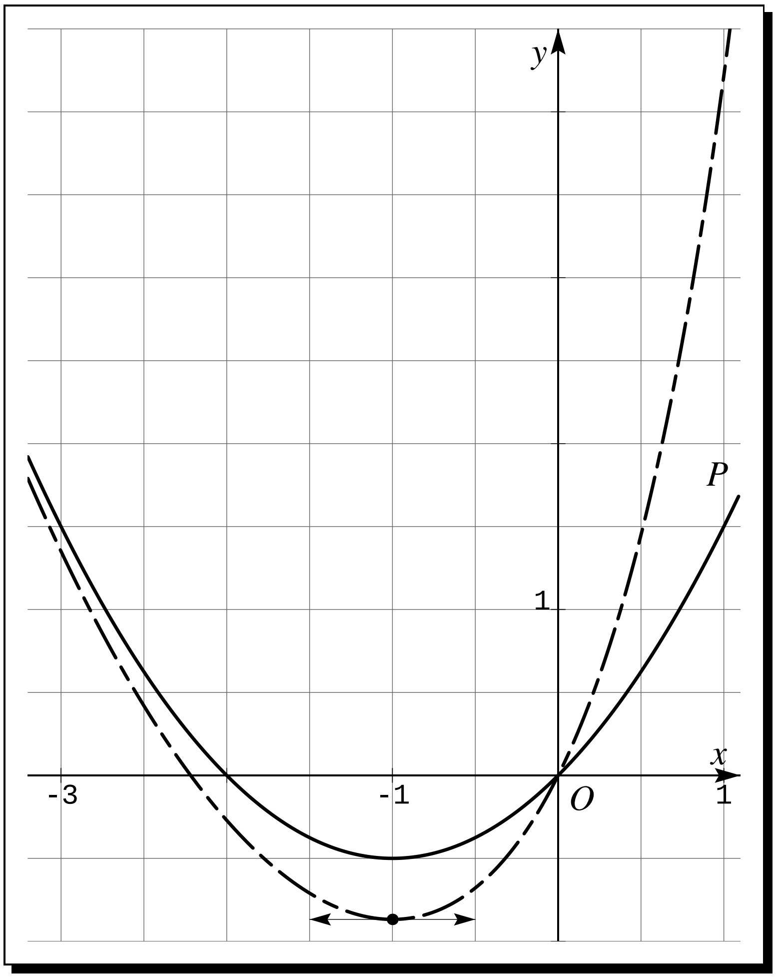
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -0,87$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

4. a) Le tableau de valeurs :

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$	$1,35$	$0,42$	$-0,27$	$-0,71$	$-0,87$	$-0,68$	0	$1,45$	$4,22$

b) et la courbe :



5. *a*) Vu les positions relatives étudiées précédemment, et l'unité d'aire étant de $4\,\text{cm}^2$, on sait que l'aire cherchée est donnée par

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{-3}^{-2} g(x) - f(x)\,dx \\ &= 4\int_{-3}^{-2} -xe^x\,dx \qquad \text{on pose } U = -x \text{ et } V' = e^x \\ &= 4\left(\int_{-3}^{-2} -e^x\,dx - \left[-xe^x\right]_{-3}^{-2}\right) \\ &= 4\left(\left[-e^x\right]_{-3}^{-2} - \left[-xe^x\right]_{-3}^{-2}\right) = -4\left[e^x(1+x)\right]_{-3}^{-2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = 4\left(3e^{-2} - 4e^{-3}\right)\,\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

b) Et $\boxed{A \approx 0,83\,\text{cm}^2}$.