Inversion

Définition 1 *Soit Ω un point du plan $\mathcal{E}_2$ et μ un réel non nul, l'**inversion de centre** Ω de **puissance** μ est l'application de $\mathcal{E}_2 \setminus \{\Omega\}$ sur $\mathcal{E}_2 \setminus \{\Omega\}$ qui, au point M, associe le point M' tel que*

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{\mu}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

Formulation complexe. On suppose que O est l'origine du plan complexe, l'inversion de centre O et de puissance μ associe au point $M(z)$, distinct de O, le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{\mu}{\bar{z}}$. Plus généralement l'inversion de centre $\Omega(\omega)$ et de puissance μ est l'application qui, au point $M(z)(z \neq \omega)$, lui associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \omega + \dfrac{\mu}{\overline{z - \omega}}$.

Inversion de puissance 1. En notant I_A^μ l'inversion de centre A et de puissance μ, $\hom(B,k)$ l'homothétie de centre B et de rapport k et $\mathrm{T}_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on vérifie :

1. $I_\Omega^\mu = \hom(\Omega,\mu) \circ I_\Omega^1$ (ie : l'inversion de puissance μ est la composée de l'inversion de puissance 1 et d'une homothétie de rapport μ).
2. $I_\Omega^\mu = \mathrm{T}_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ I_O^\mu \circ \mathrm{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}$ (ie : l'inversion de centre Ω se déduit de l'inversion de centre O en composant à droite et à gauche par une translation et son inverse).

Dans la suite on se limite à l'étude des propriétés de l'inversion de centre O (origine du plan complexe) et de puissance 1 (l'**inversion**, notée I), celle des autres inversions s'en déduit à l'aide des relations précédentes. Si $M' = I(M)$ on dit que M' est le point **inverse** de M par rapport à O ; M, M' et O sont alignés, ils vérifient :

$$\overline{OM} \times \overline{OM'} = 1.$$

Propriétés

1. I est une involution de $\mathcal{E}_2 \setminus \{O\}$ (ie : $I \circ I = Id$).
2. Si M' est le point inverse de M alors M est le point inverse de M'.
3. Si A et B sont deux points distincts de O et $A' = I(A)$, $B' = I(B)$ alors :

$$A, B, A', B' \text{sont cocycliques ou alignés avec } O \text{ et } A'B' = \frac{AB}{OA \times OB}$$

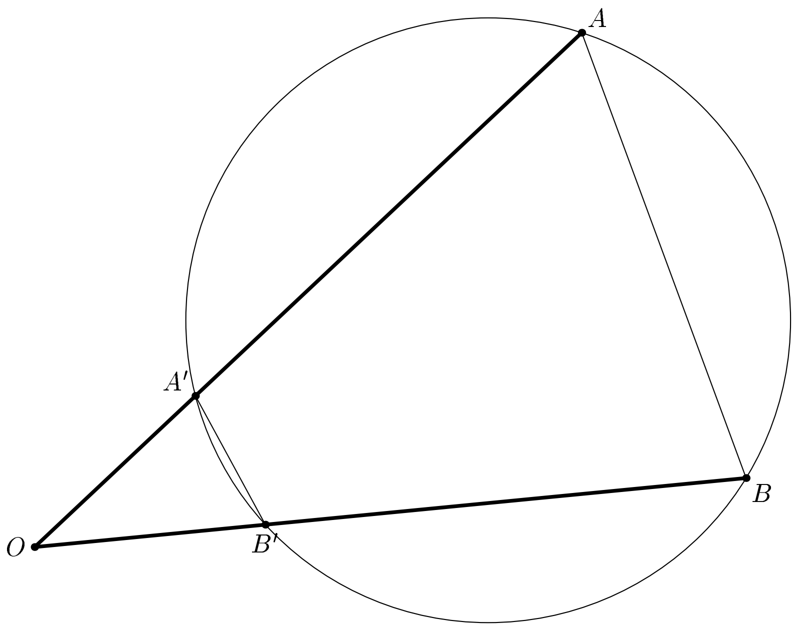

fig. 1 – Inversion et points cocycliques

Cercle d'inversion. L'ensemble des points invariants dans l'inversion de centre O et de puissance 1 est le cercle de centre O et de rayon 1, c'est le **cercle d'inversion**. Si un point est extérieur au cercle d'inversion, son inverse est intérieur et réciproquement.
Inversion et tangentes. Si une courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente en un point M, sa courbe inverse admet une tangente au point M' inverse de M et ces deux tangentes sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[MM']$.

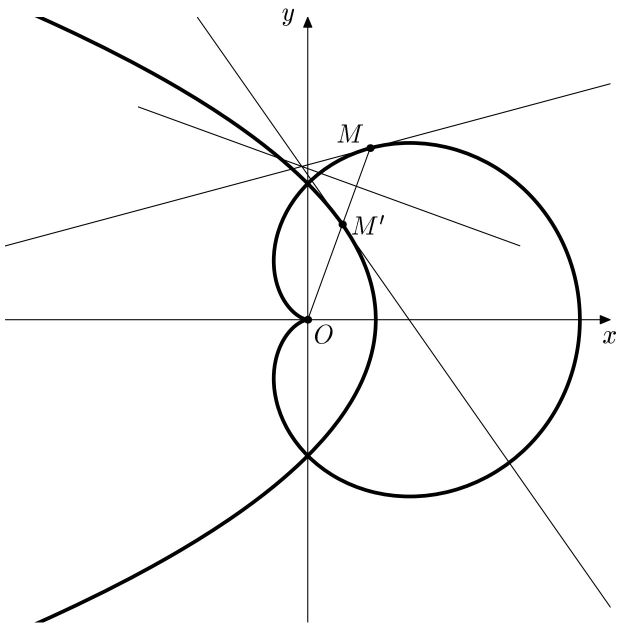

fig. 2 – Tangentes et courbes inverses

Transformation des cercles et droites. On vérifie les propositions suivantes :

1. Une droite passant par O et privée de O est globalement invariante.
2. L'image d'une droite ne passant pas par O est incluse dans un cercle passant par O
3. L'image d'un cercle passant par O et privé de O est incluse dans une droite ne passant pas par O.

4. L'image d'un cercle ne passant pas par O est incluse dans un cercle ne passant pas par O.

Compte tenu du fait que l'inversion est une involution, on énonce :

Théorème 1 *L'inversion transforme une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O privé de O et réciproquement.*

Théorème 2 *L'inversion transforme un cercle ne passant pas par O en un cercle ne passant pas par O.*

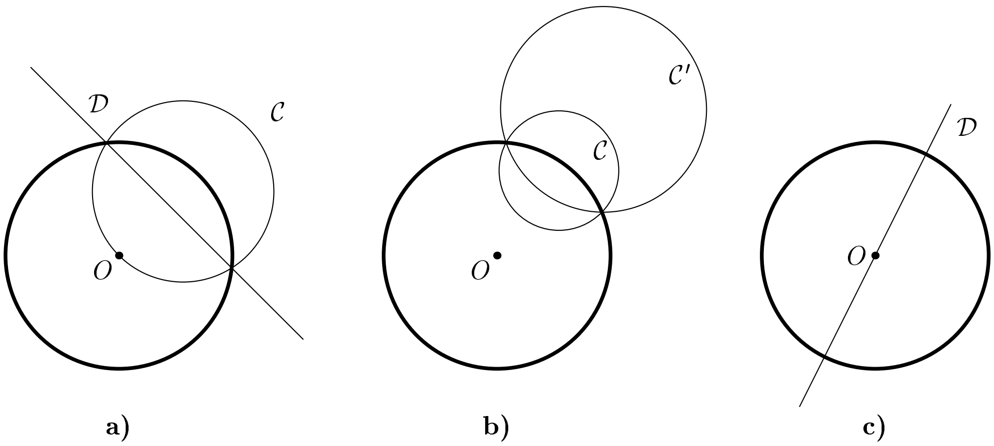

fig. 3 – Dans chaque cas le cercle d'inversion est en gras. a) cercle et droite inverse l'un de l'autre. b) cercles inverses. c) droite globalement invariante.

Constructions à la règle et au compas. En fixant le cercle d'inversion, construire :

1. L'inverse d'un point.
2. L'inverse d'une droite qui ne rencontre pas le cercle d'inversion.
3. L'inverse d'un cercle qui ne rencontre pas le cercle d'inversion.

Exercices

$\boxed{1}$ Un cercle qui contient un point et son inverse est globalement invariant.

$\boxed{2}$ Le centre d'inversion est un centre d'homothétie pour deux cercles inverses l'un de l'autre.

$\boxed{3}$ **Théorème de Ptolémée.** Pour qu'un quadrilatère soit inscriptible dans un cercle il faut et il suffit que le produit de ses diagonales soit égal à la somme des produits de ses côtés opposés.

$\boxed{4}$ Construire les cercles passant par deux points donnés A et B et tangents à un cercle donné $\mathcal{C}$.

$\boxed{5}$ Construire les cercles passant par un point donné A et tangents à deux cercles donnés $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

$\boxed{6}$ Construire les cercles tangents à trois cercles donnés $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$.

$\boxed{7}$ Déterminer le lieu des centres d'inversion O transformant dans le plan trois points A, B, C en trois points A', B', C' tels que le triangle $A'B'C'$ soit rectangle en A' ou isocèle de sommet A'.