Logarithme Népérien

1 Un peu d'Histoire des mathématiques

À la fin du XVI^e siècle, le développement du commerce et de la banque pose des problèmes de calcul numérique, auxquels les mathématiciens de renom consacrent une bonne partie de leurs efforts. Par ailleurs, les problèmes de navigation (détermination d'une longitude, de la route la plus courte), ainsi que les problèmes d'astronomie, impliquent d'importants calculs. la difficulté de ces "calculs astronomiques" est restée légendaire et a poussé à la découverte de techniques de calcul simplificatrices.
L'idée "simple", à la base de ces techniques, est qu'il est plus facile d'additionner que de multiplier. Quelques mathématiciens du début du $XVII^e$ siècle ont fabriqué des tables de correspondance qui "transforment les produits en sommes", c'est-à-dire qui permettent de calculer un produit ab en faisant une somme $a' + b'$ de la façon suivante :

en face du réel a on trouve le réel a' (appelé logarithme de a) ;
en face du réel b on trouve le réel b' ;
$\vdots$
On calcule $a' + b'$, on cherche ce réel dans la colonne des logarithmes, et en face on lit ab.

réels	logarithmes
a	a'
b	b'
$\vdots$	$\vdots$
ab	$a' + b'$
$\vdots$	$\vdots$

Le procédé est simple... mais quel réel a' mettre en face de a de façon que la table fonctionne comme il a été dit ?
Plusieurs façons d'y parvenir sont apparues presque simultanément.

La première table de logarithmes est due à l'Écossais **Neper** ; il la publia en 1614 : dans cette table, les logarithmes sont donnés avec 7 décimales. Ces logarithmes sont dits **népériens** et c'est d'eux que nous allons traiter essentiellement. Nous utiliserons des moyens que l'époque de Neper ne connaissait pas.
Le suisse Burgi, en 1620, et l'anglais Briggs, en 1624, publient chacun de leur côté une table de logarithmes dits *décimaux*. Celle de Briggs donne les logarithmes avec 15 décimales.
Depuis, les progrès de l'Analyse ont permis de dresser des tables de logarithmes par d'autres méthodes plus rapides, utilisées d'ailleurs par les calculatrices.
Un fait est remarquable : inventées sous forme de tables pour répondre à des besoins pratiques de calculs, les fonctions logarithmes se sont révélées, au fur et à mesure du développement de l'Analyse, d'une grande importance théorique, aussi bien en mathématiques que dans les sciences.

2 Approche

Activités 1 et 2 page 118 et 119.

3 La fonction logarithme népérien

3.1 Définition

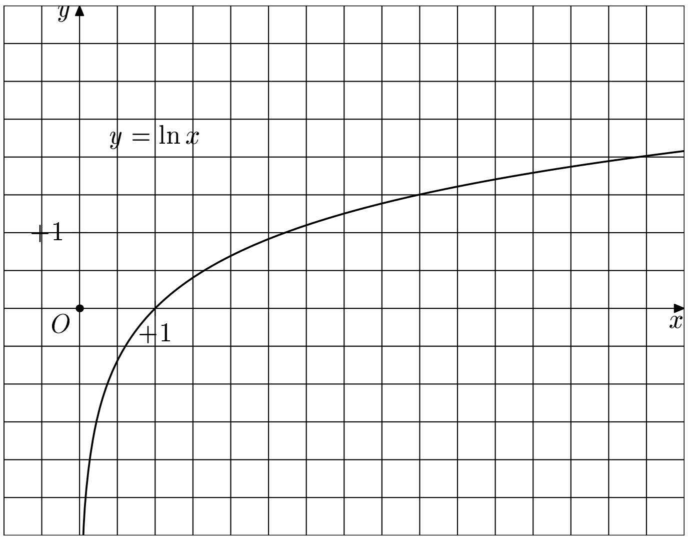
Définition 1. Il existe une et une seule fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, qui prend la valeur 0 en 1 et qui a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
Cette fonction est appelée **logarithme népérien** et est notée ln.

Pour connaître une approximation du logarithme népérien d'un nombre strictement positif, vous pouvez utilisez la touche $\boxed{\ln}$ de votre calculatrice.

3.2 Conséquences immédiates

- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$.
- La fonction ln est dérivable, donc continue, sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, il en résulte que la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
ln'	‖	+	1	+	
ln	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	



- De la stricte croissance et l'égalité $\ln 1 = 0$ on en déduit :

$$\ln x > 0 \text{ équivaut à } x \in]1;+\infty[\,;\ \ln x < 0 \text{ équivaut à } x \in]0;1[\,.$$

- De la stricte croissance on en déduit :

$$\ln a < \ln b \text{ équivaut à } a < b;\ \ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b.$$

Autrement dit, deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs logarithmes.

Remarque : Ces résultats seront utiles pour résoudre des équations du type "$\ln(u(x)) = \ln(v(x))$" et des inéquations du type "$\ln(u(x)) \leqslant \ln((v(x)))$".

4 Logarithme d'un produit

4.1 Propriété fondamentale

Théorème 1. *Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Preuve.
Vue dans l'approche. □

4.2 Conséquences de la propriété fondamentale

Théorème 2.

1. *Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ et $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.*
2. *Pour tous réels $a_1, a_2, ..., a_p$ strictement positifs, $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_p$.*
3. *Pour tout réel strictement positif a, pour tout entier relatif p, $\ln a^p = p \ln a$.*
4. *Pour tout réel $a > 0$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.*

Preuve.

1. D'après le théorème précédent, pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln a = \ln \left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln \frac{a}{b} + \ln b$. Donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
   Dans le cas particulier $a = 1$, $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
2. Quel soit p entier naturel, notons $P(p)$ l'assertion "Pour tous réels $a_1, a_2, ..., a_p$ strictement positifs, $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_p$."
   $P(1)$ est vraie. Supposons $P(p)$ vraie, prouvons alors que $P(p+1)$ est vraie.
   $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p \times a_{p+1}) = \ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p) + \ln a_{p+1}$ d'après le théorème précédent. D'après l'hypothèse de récurrence, $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_p$. Il en résulte, en vertu du principe de récurrence, que $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_p \times a_{p+1}) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_p + \ln a_{p+1}$. D'où la propriété annoncée.
3. Pour p positif, il suffit d'appliquer la propriété précédente avec $a_1 = a_2 = ... = a_p = a$.
   Si p est négatif, on utilise $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$, ainsi $\ln a^p = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln a^{-p} = -(-p \ln a) = p \ln a$.
4. Quel soit $a > 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a}$. D'où le résultat.

□

5 Etude de la fonction ln

5.1 Limites

Théorème 3.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Preuve.

– Il s'agit, suivant la définition, de prouver que, quel que soit le réel M positif alors $\ln x > M$ pour x assez grand.
  Pour cela choisissons un entier naturel n tel que $n \ln 2 > M$ *ie* $n > \frac{M}{\ln 2}$. Or $n \ln 2 = \ln 2^n$ donc n est tel que $\ln(2^n) > M$.
  Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, pour tout réel x de l'intervalle $[2^n; +\infty[$, $\ln x \geqslant \ln 2^n > M$. D'où le résultat.
– Pour $x > 0$, posons $U = \frac{1}{x}$, alors $\ln x = -\ln U$. Comme $\lim_{x \to 0^+} U = +\infty$ et $\lim_{U \to +\infty}(-\ln U) = -\infty$.
  Par composition des limites, $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

□

5.2 Le réel e et conséquences

Théorème 4.
Il existe un et un seul réel dont le logarithme népérien vaut 1, on le note e. De plus $2,718 < e < 2,719$. Pour tout entier relatif m, e^m est l'unique solution de l'équation $\ln x = m$.

Preuve.
La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[1;3]$ sur l'intervalle $[f(1);f(3)]$. Comme $\ln 1 < 1$ et $\ln 3 > 1$ alors il existe un unique réel, que l'on note e, dans l'intervalle $[f(1);f(3)]$ tel que $\ln e = 1$. Par stricte croissance de la fonction ln, e est même l'unique réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $\ln x = 1$. De plus $2,718 < e < 2,719$.
Pour tout entier relatif m, $\ln e^m = m \ln e = m$, ainsi e^m est bien solution de l'équation $\ln x = m$. Par stricte croissance de la fonction ln, c'est l'unique solution de cette équation. □

Remarque : Pour afficher e sur votre calculatrice, tabulez la séquence $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{1}$.

6 Des limites de référence

Théorème 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}; \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0.$$

Preuve.

- La fonction ln est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$, il en résulte par définition du nombre dérivé que, $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = 1$ ou encore $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- En étudiant (cf exo) les variations de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x} - \ln x$, on en démontre que pour tout réel $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$. Il en résulte que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc pour tout réel $x \leqslant 1$, $\quad 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc, par théorème d'encadrement et passage aux limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- Pour tout $x > 0$, posons $U = \frac{1}{x}$, alors $x \ln x = \frac{1}{U} \ln \frac{1}{U} = -\frac{\ln U}{U}$. Or $\lim_{x\to 0^+} U = +\infty$ et $\lim_{U\to+\infty} \frac{\ln U}{U} = 0$ donc, par composition des limites, $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

□

Remarques :

1. **L'approximation affine locale de** $\ln(1+h)$ est $\ln(1) + \ln'(1)h$ *ie* h. En remplaçant $\ln(1+h)$ par h, on commet, pour h tel que $|h| < 1$, une erreur majorée par $\frac{h^2}{2}$ (Voir exo).
2. La première limite peut s'écrire $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, elle signifie aussi que l'approxiamtion affine locale de $\ln(1+h)$ est h pour h voisin de zéro.
3. La troisième limite permet de comparer x^n et $\ln x$ pour les "grandes valeurs de x". On dira qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln x$ est négligeable devant toute puissance positive de x. Ceci est très utlile pour lever les indéterminations et guider les recherches (cf exos).

7 Fonction composée $\ln \circ u$

Théorème 6. *u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln \circ u \; : x \longmapsto \ln(u(x))$ est une fonction dérivable sur I et pour tout x de I, $(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.*

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Preuve.
Notons f, la fonction définie sur I par $f = \ln \circ u$. Par application du théorème de dérivation d'une fonction composée, f est dérivable sur I, et $f'(x) = \ln'[u(x)] \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. □

Remarque : Dans le cas où la fonction u est dérivable et strictement négative sur I, alors la fonction $(-u)$ est dérivable et strictement positive sur I donc la fonction $\ln \circ(-u)$ est dérivable sur I et $(\ln \circ(-u))'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire 1. u est une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I alors $\ln |u|$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I.

7.1 Logarithme décimal

Définition 2. La fonction **logarithme décimal**, notée log, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Ses propriétés sont celles de la fonction ln et cette fonction est très utlisée en sciences physiques.