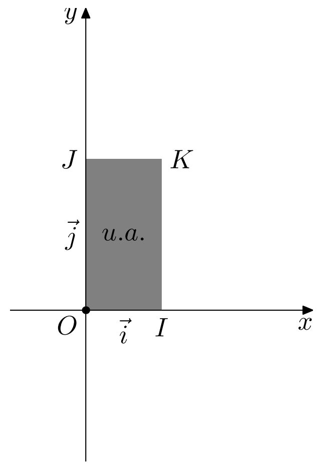
Calcul intégral

Dans tout ce chapitre lorsque l'on parle de courbe réprésentative d'une fonction ou de domaine du plan, ce dernier est muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

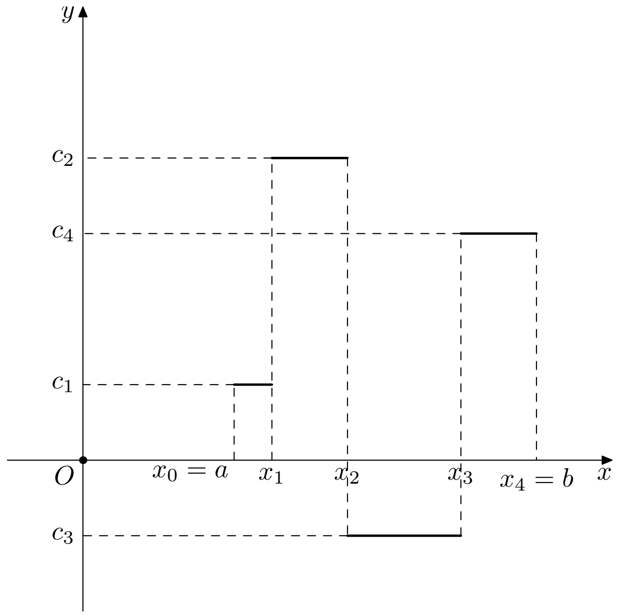
1 Intégrale et aire

Définition 1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on appelle **unité d'aire**, que l'on note $u.a.$, l'aire du rectangle $OIJK$ où $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$



1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

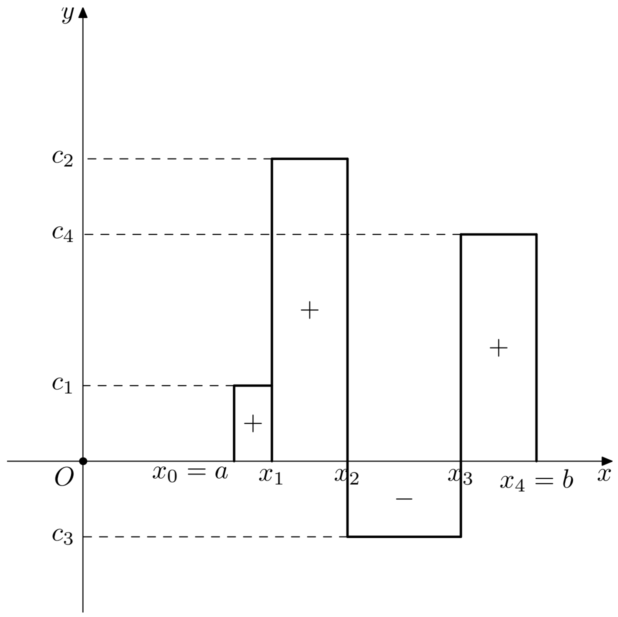
La fonction f définie sur $[a; b]$ et représentée ci-dessous est dite **fonction en escalier** : elle est **constante par morceaux** sur $[a; b]$.



Par définition, **l'intégrale** de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel

$$I(f) = (x_1 - x_0)c_1 + (x_2 - x_1)c_2 + (x_3 - x_2)c_3 + (x_4 - x_3)c_4 = \Sigma_{i=1}^{4}(x_i - x_{i-1})c_i$$

.
Autrement dit, l'intégrale de f sur $[a;b]$ est la somme algébrique des aires (en u.a) des rectangles indiqués sur la figure, ces aires étant comptées :
• positivement pour les rectangles au-dessus de (Ox)
• négativement pour les rectangles en-dessous de (Ox).



Cas général

Définition 2. f est une fonction en escalier, il existe $n+1$ réels x_i dans $[a;b]$ avec $x_0 = a, x_n = b$ et $x_0 < x_1 < ... < x_n$ tels que f est constante sur intervalle ouvert $]x_{i-1}; x_i[$. Notons c_i la constante sur chacun de ces intervalles. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$, le nombre noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et défini par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Sigma_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i$$

.
Autrement dit, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la somme algébrique des aires des rectangles définis par l'axe (Ox) et la courbe de f, ces aires étant comptées :
• positivement pour les rectangles au-dessus de (Ox)
• négativement pour les rectangles en-dessous de (Ox).

Remarques :
- Les images $f(x_i)$ n'interviennent pas dans ce calcul.
- Ce calcul ne dépend pas de la subdivision associée à f.
- La lettre t dans l'écriture $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est muette on peut la remplacer par toute autre lettre, par exemple on peut écrire $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Exemple d'une fonction continue positive

Traitez l'activité 2 page 199 de votre manuel.

2.2 Cas général

Nous admettrons que la méthode (qui a permis dans ce cas de calculer l'aire sous la courbe) mise en place dans l'activité précédente est généralisable pour une fonction continue f sur $[a;b]$ à savoir :
Pour toute fonction continue sur $[a;b]$ il existe deux suites de fonctions en escalier (g_n) et (h_n) telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [a;b]$, $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$
- les suites (s_n) et (S_n) définies par $s_n = \int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t$ et $S_n = \int_a^b h_n(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes et ont même limite l.

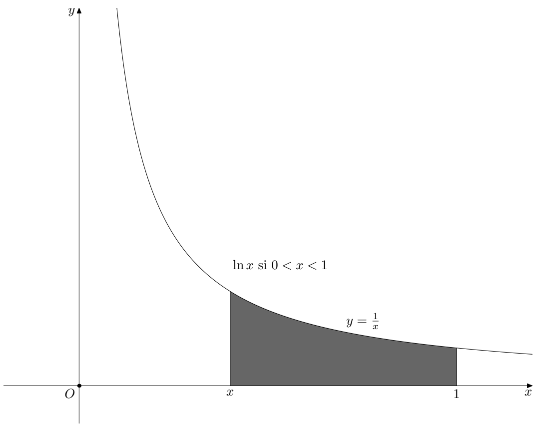
Définition 3. Cette limite l est l'intégrale de f sur $[a;b]$ que l'on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Dans ces conditions, lorsque :

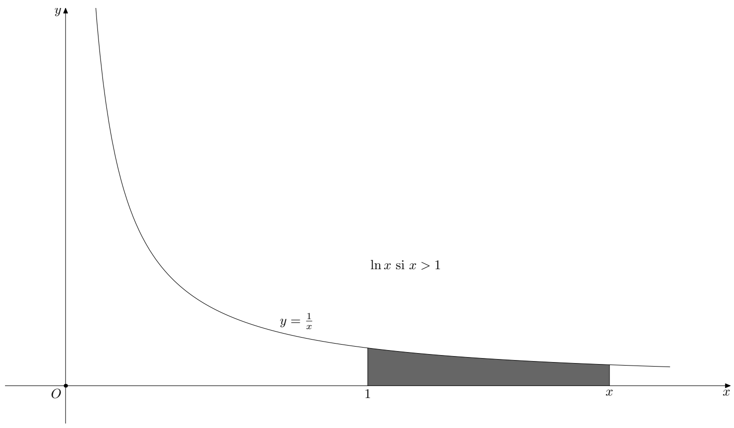
- f est positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire (en u.a) du domaine "entre la courbe de f et l'axe des abscisses".
- f est négative sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'opposée de l'aire (en u.a) du domaine "entre la courbe de f et l'axe des abscisses".

Ce qui précède suppose $a < b$, par convention **on étend la définition de l'intégrale** de la façon suivante :

- lorsque $a > b$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.
- lorsque $a = b$, $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Remarque : Dans ce cadre si vous vous rappelez la façon dont on a définit la fonction ln (cf page 119) on peut écrire pour tout $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.





3 Propriétés de l'intégrale

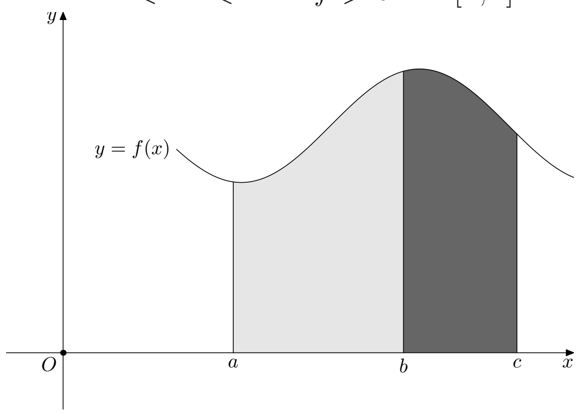
Les propriétés qui suivent se démontrent "aisément" pour des fonctions en escalier puis se transmettent aux fonctions continues. Les théorèmes sont donnés pour des fonctions continues mais sont valables pour des fonctions en escalier.

3.1 Relation de Chasles (admis)

Théorème 1. *f est continue sur I, alors quels que soient les réels a, b, c de I,*

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Interprétation en termes d'aires :
si $a \leqslant b \leqslant c$ et $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$



3.2 Linéarité de l'intégrale (admis)

Théorème 2. *f et g deux fonctions continues sur I, a et b deux réels de I, α et β deux réels quelconques. Alors :*

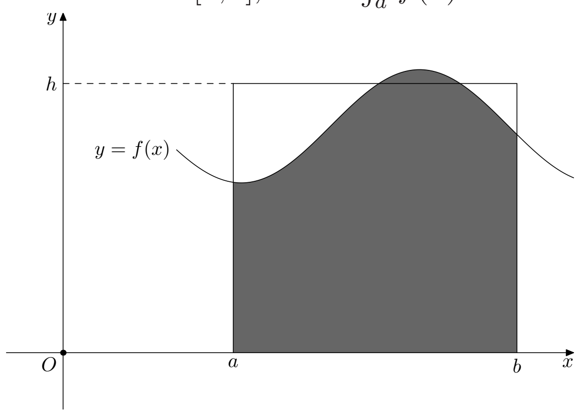
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

3.3 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4. f est continue sur $[a;b]$ avec $a < b$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Interprétation en termes d'aires :
Lorsque f est positive sur $[a;b]$ la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est la hauteur h d'un rectangle à côtés parallèles aux axes, de base $[a;b]$, d'aire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Remarque : La valeur moyenne d'une fonction sur $[a;b]$ nous fournit une fonction constante qui a la même intégrale que f sur $[a;b]$. En physique cela est utilisée pour remplacer un phénomène variable par un phénomène constant ayant les mêmes propriétés pour une "certaine mesure définie grâce à l'intégrale". (Intensité moyenne, intensité efficace....)

3.4 Intégration d'une inégalité

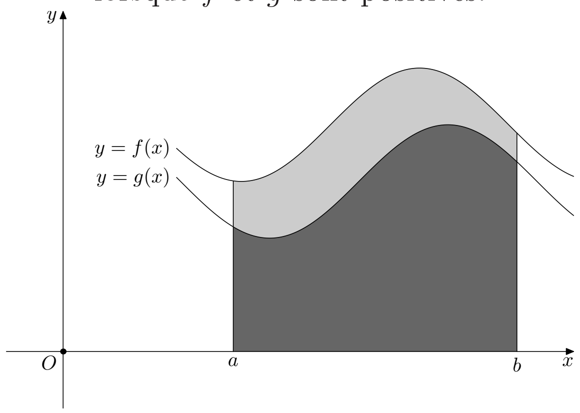
Dans cette section $a \leqslant b$.

Théorème 3. *f et g deux fonctions continue sur I, a, b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.*

1. *Lorsque $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.*
2. *Lorsque $g \leqslant f$ sur $[a; b]$ alors,*

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Interprétation en termes d'aires :
lorsque f et g sont positives.

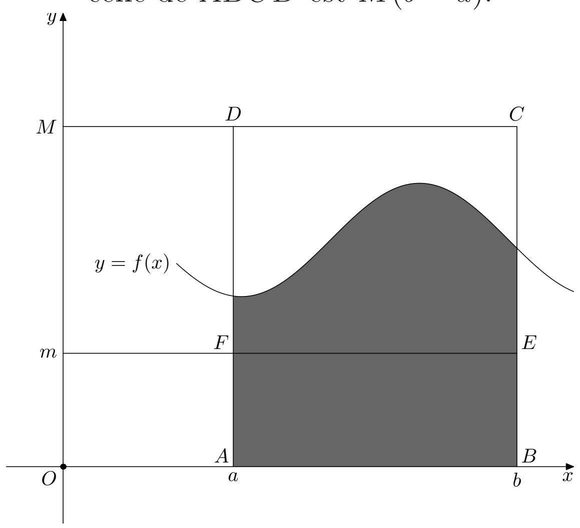


Preuve.
Le 1. est évident car dans ce cas il s'agit d'une aire.
Pour le 2., $g \leqslant f$ se traduit par $g - f \leqslant 0$. Alors d'après le 1., $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$. La linéarité de l'intégrale permet alors de conclure. □

Corollaire 1. Inégalité de la moyenne
f continue sur I, a, b deux réels de I tels que $a \leqslant b$, m et M deux réels.
Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a; b]$ alors,

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

Interprétation en termes d'aires :
Lorsque f est positive et m et M sont positifs, l'aire de $ABEF$ est $m(b-a)$ et celle de $ABCD$ est $M(b-a)$.



Remarque : En divisant l'encadrement par $b - a$ (lorsque $a \neq b$) on obtient un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ d'où le nom du corollaire.

Corollaire 2. Inégalité de la moyenne et valeur absolue
f continue sur I, a, b deux réels quelconques de I, M un réel positif.
Si $|f| \leqslant M$ sur $[a; b]$ ou sur $[b; a]$ alors,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M|b-a|$$

4 Intégrale et primitives

Le but de cette section est de lier la dérivation et l'intégration.

4.1 Primitives d'une fonction continue

Théorème 4. *f est une fonction continue sur un intervalle I et a est un réel de I.*
La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve.
Nous allons démontrer ce théorème dans le cas où f est continue et croissante sur I. Nous admettrons le résultat dans les autres cas.
Prouvons d'abord que F est dérivable en tout point x_0 de I et que $F'(x_0) = f(x_0)$. Pour cela on étudie la limite quand h tend vers zéro de $t(h) = \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$.
Or $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt = \int_{x_0}^a f(t)dt + \int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

- Premier cas : $h > 0$ alors $x_0 < x_0 + h$. Comme f est croissante, pour tout t dans $[x_0; x_0+h]$, $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)$.
  L'inégalité de la moyenne fournit alors :
  $[x_0 + h - h]f(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leqslant [x_0 + h - x_0]f(x_{0+h})$ donc $f(x_0) \leqslant t(h) \leqslant f(x_0+h)$.
- Deuxième cas : $h < 0$ alors $x_0 + h < x_0$. Comme f est croissante, pour tout t dans $[x_0+h; x_0]$, $f(x_0+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0)$.
  L'inégalité de la moyenne fournit alors :
  $[x_0 - (x_0+h)]f(x_0+h) \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt \leqslant [x_0 - (x_0+h)]f(x_0)$ donc $-hf(x_0+h) \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt \leqslant -hf(x_0)$.
  Or $\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt = -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ donc $-hf(x_0+h) \leqslant -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leqslant -hf(x_0)$ c'est-à-dire $hf(x_0+h) \geqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \geqslant -hf(x_0)$.
  Par division par h qui est négatif on obtient alors : $f(x_0+h) \leqslant t(h) \leqslant f(x_0)$.

En résumé,
si $h > 0$ alors $f(x_0) \leqslant t(h) \leqslant f(x_0+h)$ et
si $h < 0$ alors $f(x_0+h) \leqslant t(h) \leqslant f(x_0)$.
Mais f est continue sur I donc en x_0 et ainsi $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Alors d'après le théorème d'encadrement on obtient $\lim_{h\to 0} t(h) = f(x_0)$.
Il en résulte que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Ceci est vrai pour tout $x_0 \in I$ donc F est dérivable sur I et $F' = f$.
Ensuite, $F(a) = 0$ donc F est bien l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a d'après le cours sur les primitives. □

4.2 Calculs d'intégrale

4.2.1 Calculs d'intégrale à partir d'un primitive

Théorème 5. *f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I.*
F_1 est une primitive quelconque de f sur I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F_1(b) - F_1(a).$$

On note souvent, par commodité, $[F_1(t)]_a^b = F_1(b) - F_1(a)$.

Preuve.
D'après le théorème précédent, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Si F_1 est une primitive quelconque alors il existe une constante c telle que pour tout x de I, $F(x) = F_1(x) + c$. Comme $F(a) = 0$ alors $c = -F_1(a)$. Ainsi pour tout x de I, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F_1(x) - F_1(a)$. En prenant $x = b$ on obtient alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F_1(b) - F_1(a)$ d'où le résultat. □

Exemple : $\int_0^1 2t^2 + 4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^3 + 4t\right]_0^1 = \frac{14}{3}$.

4.2.2 Intégration par parties

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I.
Alors $(uv)' = u'v + uv'$ donc $u'v = (uv)' - uv'$, et les fonctions $u'v$ et uv' sont continues sur I. Il s'ensuit que si a et b sont deux réels de I alors,

$$\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b ((uv)' - uv')(x)\,\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale on obtient alors,

$$\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme uv est une primitive de $(uv)'$ sur I alors,

$$\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette dernière égalité permet de calculer $\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de deux autres intégrales. Cette méthode est appelée **intégration par parties**.

Théorème 6. *u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I.*

$$\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$$