Dérivation

1 Rappels ou presque...

1.1 Nombre dérivé. Fonction dérivée

f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et a est un nombre de $\mathcal{D}_f$.

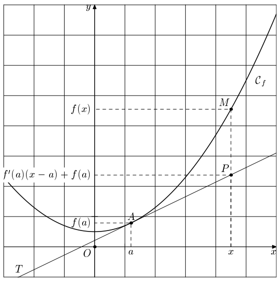
Définition 1.
Dire que la fonction f **est dérivable au point** a signifie que la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle l en zéro ou bien, de façon équivalente que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle l en a.
Cette limite l est appelée **le nombre dérivé** de f au point a. On le note $f'(a)$.

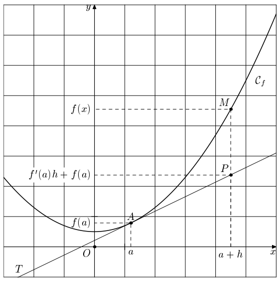
1.2 Notation différentielle

Lorsque f est dérivable en x, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.
En sciences physiques, une variation (pour nous une différence) s'écrit souvent en utilisant le symbole Δ.
Par exemple pour écrire une variation du temps on utilise l'expression Δt.
Avec cette notation, puisque h exprime la différence entre $x+h$ et x, on peut le noter Δx. De même puisque $f(x+h)-f(x)$ exprime une différence d'ordonnée que l'on note souvent y on peut le noter Δy.
L'égalité précédente s'écrit alors $\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)}$.
On est alors conduit à traduire cette égalité, par "passage à la limite", en écrivant $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. (Dans l'esprit on peut retenir que l'expression dx exprime un Δx infiniment petit....) C'est la **notation différentielle** du nombre dérivé.
Fréquemment, on confond, par abus de langage, y et f, la notation différentielle s'écrit alors $\frac{df}{dx} = f'(x)$.
Cette notation est souvent utilisée en sciences physiques.
On peut écrire, suivant le contexte, $dy = f'(x)dx$ ou $df = f'(x)dx$.

1.3 Approximation affine locale.Tangente

Définition 2. $\mathcal{C}_f$ est la courbe d'une fonction f qui est dérivable au point a.
La **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point** $A(a; f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
Elle se conçoit comme la "position limite" des sécantes (AM) (cf figure) lorsque M tend vers A sur la courbe.





Propriété 1. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Définition 3. $f'(a)(x-a)+f(a)$ (resp. $f'(a)h+f(a)$)**est l'approximation affine locale de** $f(x)$ (resp. $f(a+h)$)pour x voisin de a (resp. h voisin de 0). Autrement dit, $f(x)-f(a) \approx (x-a)f'(a)$ pour x voisin de a (resp. $f(a+h)-f(a) \approx hf'(a)$ pour h voisin de zéro).
Avec la notation utilisée en sciences physiques, cela peut s'écrire, $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$ ou encore $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$ lorsque lorsque Δx est voisin de zéro.
Tout ceci ne fait qu'exprimer le fait que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$

1.4 Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation

f est définie sur I $f(x) = \ldots$	f' est définie sur J $f'(x) = \ldots$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = mx + p$ Cas particuliers : $I = \mathbb{R}$ $f(x) = p$ $I = \mathbb{R}$ $f(x) = x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = m$ Cas particuliers : $J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$ $J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 1$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$
$I = [0; +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x}$	$J =]0 + \infty[$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$
$I = \mathbb{R}^*$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$J = \mathbb{R}^*$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \|x\|$	$J = \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \begin{cases} f'(x) = 1 \text{ si } x > 0 \\ f'(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$I = \mathbb{R}$ si $n > 0$ et $I = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$ $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^* \backslash \{1\}$	$J = \mathbb{R}$ si $n > 0$ et $J = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$ $f'(x) = nx^{n-1}$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = -\sin x$
$I = \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$J = \mathbb{R}$ $f'(x) = \cos x$

Fonction	$u+v$	uv	ku (k constante)	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$u(ax+b)$
Fonction dérivée	$u'+v'$	$u'v+uv'$	ku'	$\frac{-v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$au'(ax+b)$

1.5 Application au variations. Extremums locaux

Théorème 1. *(admis)*
f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et sa fonction dérivée est f'.

- *Si f' est* **strictement positive sur** I*, sauf peut-être en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si f' est* **strictement négative sur** I*, sauf peut-être en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si f' est* **nulle sur** I *alors f est* **constante** *sur I.*

Définition 4. f est une fonction définie sur D et c est un point de D distinct des extrémités. Dire que $f(c)$ est un **maximum (resp minimum) local de** f en c signifie que pour tout x d'un intervalle ouvert I', contenant c et inclus dans D, $f(x) \leqslant f(c)$ (resp $f(x) \geqslant f(c)$)

Remarque : Extremum à une extrémité :
Si $D = [a; b]$, dire que $f(a)$ est un maximum local (par exemple) de f en a signifie que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x d'un intervalle $[a; \alpha[$ avec $\alpha \leqslant b$.

Théorème 2. *(admis) f est dérivable sur un intervalle I et c un point distinct des extrémités de I. Si $f(c)$ est un extremum local alors $f'(c) = 0$*

2 Dérivée d'une fonction composée

2.1 Théorème fondamental

Théorème 3. *g est une fonction dérivable sur un intervalle J. u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.*
Alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$.
Autrement dit,

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$$

Preuve.
Il s'agit de prouver que, pour tout $a \in I$, $\frac{g(u(x))-g(u(a))}{x-a}$ admet une limite réelle l lorsque x tend vers a.
$a \in I$, notons $b = u(a)$ et $t(x) = \frac{g(u(x))-g(u(a))}{x-a}$ pour tout $x \in I$ distinct de a. Il est clair que $t(x) = 0$ si $u(x) = u(a)$.
g est dérivable en b, introduisons alors la fonction $\phi\ : J \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\left\{ \begin{array}{lcl} \phi(y) & = & \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \quad \text{si } y \neq b \\ \phi(b) & = & g'(b) \end{array} \right.$
cette fonction, du fait de la dérivabilité de g en b, est continue en b.
Alors pour tout $x \in I$ distinct de a, $\phi\left[u(x)\right] \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} = \left\{ \begin{array}{ll} t(x) & \text{si } u(x) \neq u(a) \\ 0 = t(x) & \text{si } u(x) = u(a) \end{array} \right.$. Donc pour tout $x \in I$ distinct de a, $t(x) = \phi\left[u(x)\right] \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a}$
Ainsi $\lim_{x \to a} t(x) = \lim_{x \to a} \phi\left[u(x)\right] \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a}$. Mais comme u et g sont continues respectivement en a et b, par composition de limites $\lim_{x \to a} \phi\left[u(x)\right] = g'(b)$. Ensuite comme u est dérivable en a, $\lim_{x \to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a} = u'(a)$. Par multiplication on obtient alors $\lim_{x \to a} t(x) = g'(b) \ \times u'(a)$. Puisque $b = u(a)$ cela s'écrit donc $\lim_{x \to a} t(x) = g'(u(a)) \ \times u'(a)$. □

2.2 Applications

Théorème 4. *Dérivation de $\sqrt{u}$*
u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable

sur I et

$$\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Preuve.
On applique le théorème précédent avec g la fonction racine et $J =]0; +\infty[$. $\square$

Remarque : Ce type de fonction peut-être dérivable en un α tel que $u(\alpha) = 0$, on a recourt à la définition pour étudier ce cas particulier...

Théorème 5. *Dérivation de u^n, n entier relatif non nul*
u est une fonction (qui ne s'annule pas sur I si $n < 0$) dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

Preuve.
On applique le théorème précédent avec g la fonction $x \longmapsto x^n$ et $J = \mathbb{R}^*$ si $n < 0$ ou $J = \mathbb{R}$ sinon. $\square$

3 Dérivées successives

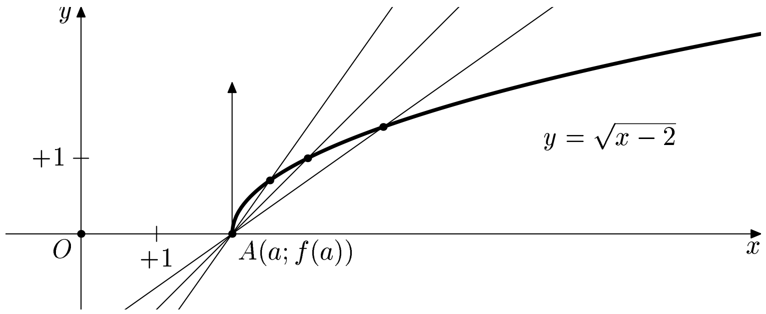
f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa fonction dérivée f' ou $f^{(1)}$ s'appelle sa **dérivée première (ou d'ordre 1)** de f.
Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f'' ou $f^{(2)}$; elle est appelée **dérivée seconde (ou d'ordre 2)** de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit, lorsque c'est possible, $f^{(n)}$, la fonction **dérivée n-ième (ou d'ordre n)** de f comme étant la dérivée de la fonction **dérivée (n-1)-ième (ou d'ordre n-1)** de f.

4 Limites et taux de variations

TD 5page 74.
On parvient quelques fois à lever une indétermination "$\frac{0}{0}$"en utilisant la définition du nombre dérivé après avoir procédé à d'habiles réécritures....
On cherche à écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ avec g dérivable en a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = g'(a)$.
Par exemple, on remarque que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$.
Comme la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \cos'\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.
Il en résulte que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$.

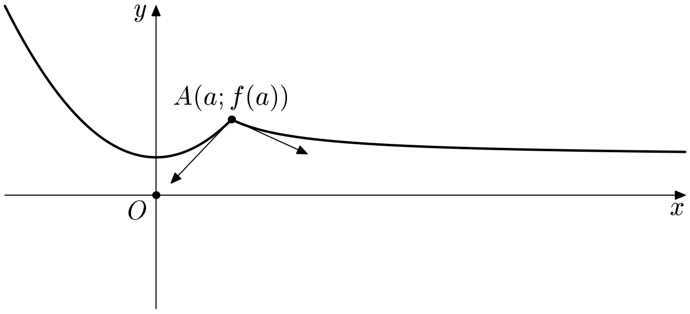
5 Tangente verticale

(Généralisation de ce qui a été vu pour la fonction racine en zéro)
TD 3 page 72
f est une fonction continue mais non dérivable en un point a de $\mathcal{D}_f$ telle que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ (la limite en a peut être à gauche ou à droite).
Géométriquement cela signifie que les coefficients directeurs des sécantes issues du point $A(a; f(a))$ sur $\mathcal{C}_f$ se "rapprochent" de la droite d'équation $x = a$. Cela conduit à dire que la courbe de f admet une tangente verticale au point $A(a; f(a))$.



6 Dérivée à gauche et à droite ; point anguleux

Lorsqu'une fonction f est continue sur un intervalle contenant a et lorsque la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle l à droite en a, on dit que la fonction f est **dérivable à droite** en a. On note $f'_d(a)$ le nombre l, que l'on appelle le nombre dérivé de f à droite en a.
De la même façon on définit la dérivabilité à gauche en a et on note $f'_g(a)$ le nombre dérivé à gauche.
Géométriquement la courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) en $A(a; f(a))$. Le coefficient directeur de la demi-tangente à droite (resp. à gauche) est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).
Lorsque $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que A est un **point anguleux**.



7 Primitives d'une fonction

7.1 Définition. Lien entre deux primitives

Définition 5. f est une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Exemples :

- $F_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$ et $F_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-4 \end{array}$ sont des primitives de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 \end{array}$
- $H : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est une primitive de $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$
- $G : \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{x} \end{array}$ est une primitive de $g : \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$

Théorème 6. *(admis pour l'instant...) Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

Remarques :

- Attention une fonction non continue sur I peut avoir une primitive sur I. En effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en zéro. Cependant c'est, en tout point de $\mathbb{R}$ la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = 0$ et $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ qui est donc une de ses primitives.
- L'hypothèse I est un intervalle est essentielle...

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, prouvez que f admet une primitive et donnez-en une.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x - 4 \end{array}$

Théorème 7. *f est une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.*

Preuve.
F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$; Donc G est une primitive de f sur I.
Réciproquement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$. La dérivée de $G - F$ est donc nulle sur l'intervalle I ainsi $G - F$ est constante sur I : il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat. □

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminez les primitives de f. Pouvez-vous en donner une qui s'annule en 2 ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 4x + 7 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -5t^3 + 3t^2 + 8 \end{array}$

Corollaire 1. f est une fonction définie sur un intervalle I.
x_0 est un réel donné dans I et y_0 un réel quelconque.
Alors il existe une primitive et une seule G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve.
En effet, si F est une primitive de f sur I, toute autre primitive G est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel. Comme $G(x_0) = y_0$ équivaut à $k = y_0 - F(x_0)$. La fonction définie par $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ répond au problème. La valeur de k est unique d'où le résultat. □

Exercice 3

f est la fonction définie sur R par $f(x) = \cos x$. Déterminez la primitve de f qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$.

7.2 Techniques de calculs de primitives

7.2.1 Primitives de fonctions usuelles

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants déjà mis en place dans les exemples précédents :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent "par lecture inverse" le tableau suivant :

fonction f	primitive F	sur l'intervalle $I = ...$
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha < -1$.
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

7.2.2 Formules générales

Le tableau suivant résume divers cas d'exploitation de la dérivée d'une fonction composée pour l'expression d'une primitive.
Dans chaque cas, u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

fonction f	primitive F	remarques
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{\alpha+1}$	Lorsque $\alpha < -1$ alors u ne doit pas s'annuler.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$x \longmapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	U primitve de u sur I.