Limites-Continuité

1 Rappels sur les limites de fonctions

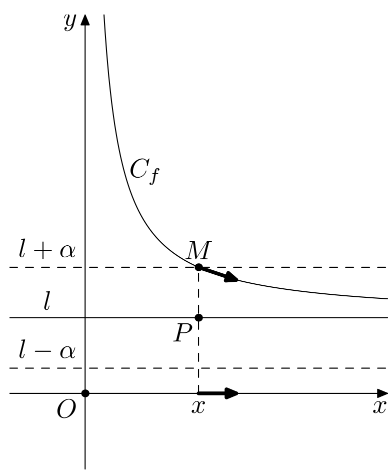
1.1 Limite en l'infini

Dans cette section f est définie sur un voisinage de $+\infty$ ie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ où a est un réel, ou sur un voisinage de $-\infty$ ie sur un intervalle du type $]-\infty;b[$ où b est un réel.

1.1.1 Limite réelle en l'infini. Asymptote horizontale

Intuitivement, dire que la fonction f **a pour limite le nombre** l **en** $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de l. **Plus précisément** cela signifie que tout intervalle ouvert centré en l (ie du $]l-\alpha;l+\alpha[$, aussi petit que soit $\alpha>0$) contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x "assez grands" (ie tous les x d'un intervalle du type $]A;+\infty[$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$



Graphiquement, cela signifie que la courbe de f est "de plus en plus proche" de la droite d'équation $y=l$ lorsque x tend vers $+\infty$ (Autrement dit la distance PM tend vers zéro). On dit que la droite d'équation $y=l$ est asymptote horizontale à la courbe de f.

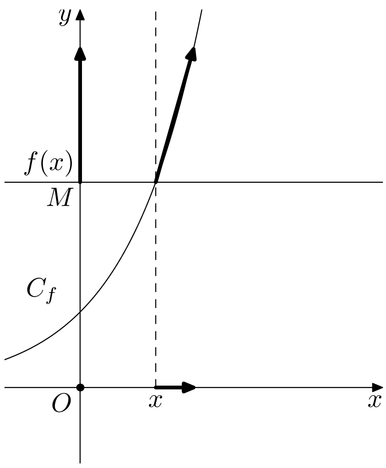
Remarques

- L'expression "x assez grand" est l'analogue pour les fonctions de l'expression "à partir d'un certain rang" pour les suites.
- Par analogie avec ce qui précède on définit aussi : la notion de limite réelle en $-\infty$.

1.1.2 Limite infinie en l'infini

Intuitivement, dire que la fonction f **a pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, les nombres $f(x)$ correspondants deviennent de plus en plus grands. **Plus précisément** cela signifie tout intervalle ouvert du type $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x "assez grands". On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$



Graphiquement, cela signifie que la courbe de f finit par "passer au-dessus" de toute droite d'équation $y = M$ pour les grandes valeurs de x.

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et les limites infinies en $-\infty$.

1.2 Limite d'une fonction en un point

Dans cette section, f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. a est un réel qui appartient à $\mathcal{D}_f$ ou qui en est une borne.

1.2.1 Limite réelle d'une fonction en un point

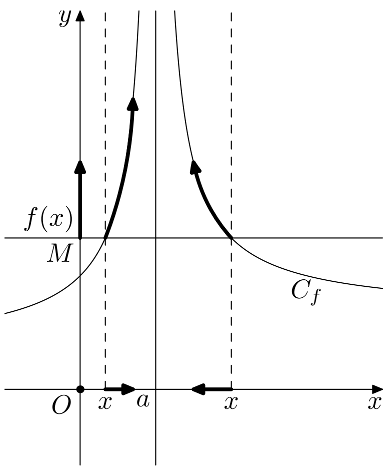
Intuitivement, dire que la fonction f **a pour limite le nombre** l **en a**, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de l. **Plus précisément** tout intervalle ouvert centré en l (ie du type $]l-\alpha; l+\alpha[$, aussi petit que soit $\alpha > 0$) contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x "assez proches de a". On écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

1.2.2 Limite infinie en un point. Asymptote verticale

Intuitivement, dire que la fonction f **a pour limite** $+\infty$ **en** a, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de a, les nombres $f(x)$ correspondants deviennent de plus en plus grands. **Plus précisément** cela signifie tout intervalle ouvert du type $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ prises pour tous les x "assez proches de a". On écrit alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$



Graphiquement, cela signifie que la courbe de f est "de plus en plus proche" de la droite d'équation $x = a$ lorsque x tend vers a. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Remarques

– On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

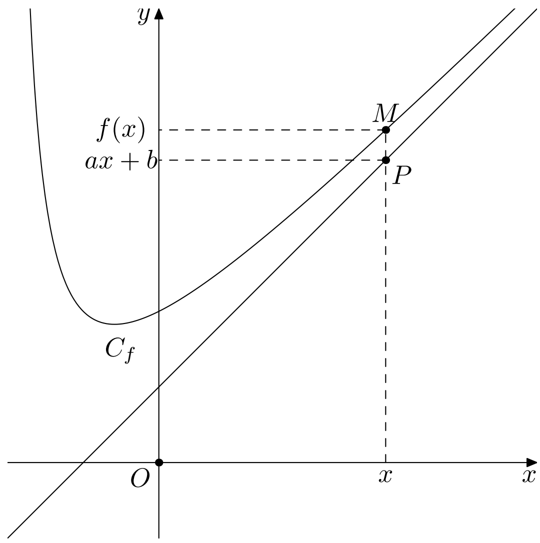
– On peut être amené à distinguer, lorsqu'elles existent les limites à gauche et à droite de a, à savoir : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$.

1.3 Asymptote oblique

f est une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire une intervalle du type $]\alpha;+\infty[$ où α est un réel. $\mathcal{C}_f$ est la courbe réprésentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$. Notons d la droite d'équation $y=ax+b$ puis, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point de d d'abscisse x. Alors $PM=|f(x)-(ax+b)|$. Ainsi la longueur PM tend vers zéro lorsque x tend ves $+\infty$. On conçoit alors que $\mathcal{C}_f$ suit la direction de d. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 1. On dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$, lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.



Remarques :

1. On définit de même la notion d'asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.
2. Souvent on est amené à étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ afin d'étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote oblique d'équation $y=ax+b$.
3. Une courbe peut couper son asymptote oblique (cf exo).
4. Une courbe peut avoir une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre, différente au voisinage de $-\infty$ (cf exo).

1.4 Opérations sur les limites

Il convient de se rappeler du cours de première S que les opérations algébriques sur les limites sont "assez intuitives" et que seuls quatre cas, dit cas d'indétermination, demandent une étude particulière : $"+\infty+(-\infty)"$; $"0\times\infty"$; $"\dfrac{0}{0}"$; $"\dfrac{\infty}{\infty}"$.

2 Limites et composition

Cherchons, par exemple, à déterminer le comportement de $f\ :x\longmapsto\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-5}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Posons, $X=\dfrac{2x+1}{x-5}$, alors $f(x)=\sqrt{X}$. D'après les résultats de la section précédente (vus en première S), $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

La fonction racine étant continue sur $[0; +\infty[$, $\lim_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$, cela conduit à penser que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-5}} = \lim_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Lorsque qu'on écrit $X = \dfrac{2x+1}{x-5}$ et $f(x) = \sqrt{X}$, on dit que l'on a changé de variable, en fait, on a composé la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-5}$ suivie de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Ce résultat intuiftif, s'il en ait, est alors justifié par le théorème suivant :

Théorème 1. *(admis)*
f, g, u sont trois fonctions telles que $f(x) = g(u(x))$. Chacune des lettres a, b, c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{u}{\longmapsto} & u(x) & \overset{f}{\longmapsto} & f(u(x)) \\ \text{tend vers } a & \rightsquigarrow & \text{tend vers } b & \rightsquigarrow & \text{tend vers } c \end{array}$$

3 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.
f, g, h sont trois fonctions définies sur $]b; +\infty[$, l un réel.
Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont la même limite l en $+\infty$ alors f a une limite en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Ce théorème reste valable en modifiant correctement le domaine de validité de l'encadrement pour des limites en $-\infty$ ou en un réel a.

Preuve.
La démonstration repose sur la définition de limite, définition que l'on maîtrise mal en terminale. □

Exercice 1

Prouvez que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ admet une limite en $+\infty$ et calculez cette limite.

Corollaire 1.
f et g sont deux fonctions définies sur $]b; +\infty[$, l un réel.
Si pour tout $x \in I$, $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Ce corollaire reste valable en modifiant correctement le domaine de validité de l'inégalité pour des limites en $-\infty$ ou en un réel a.

Théorème 3. *Comparaison à l'infini*
f et g sont deux fonctions définies sur $]b; +\infty[$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Ce théorème s'adapte pour obtenir des comparaisons avec des limites en $-\infty$ ou en un réel a.

4 Continuité d'une fonction

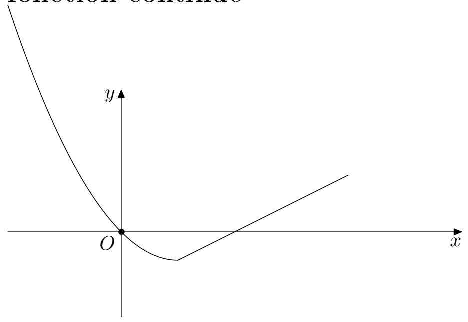
4.1 Définitions

Dans cette section f est une fonction et I est un intervalle inclus dans son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

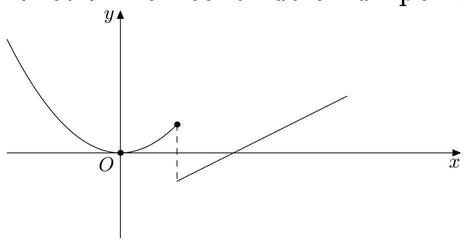
Définition 2.

– Dire qu'une fonction f **est continue en un point** a de I signifie que f a une limite en a et que cette limite est $f(a)$ ie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou bien $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.
– Dire qu'une fonction f **est continue sur l'intervalle** I signifie que f est continue en tout point de I.

fonction continue



fonction non continue en un point



Remarques :
- Dans cette définition, il se peut que la limite en a soit en fait une limite à gauche ou à droite si a est une borne de I.
- Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle I, sa représentation graphique, sur I ne comporte aucune rupture ; autrement dit, on peut la tracer "sans lever le crayon".
- La fonction partie entière est un bon exemple de fonction qui n'est pas continue en chacun de ses points.
- La pluplart des fonctions étudiées en terminale sont continues, en particulier, la définition fournit immédiatement que **toutes les fonctions construites algébriquement ou par composition à partir des fonctions usuelles sont continues**.
- On convient que dans les tableaux de variations, les flèches obliques de variations indiquent aussi la continuité. Lorsqu'il n'y a pas continuité en point il conviendra donc de trouver un moyen explicite de l'indiquer (une rupture dans la flèche... ?)

Enfin il convient de rappeler qu'en première nous avons démontré (lors de la démonstration de la dérivée d'un produit) que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, autrement dit,

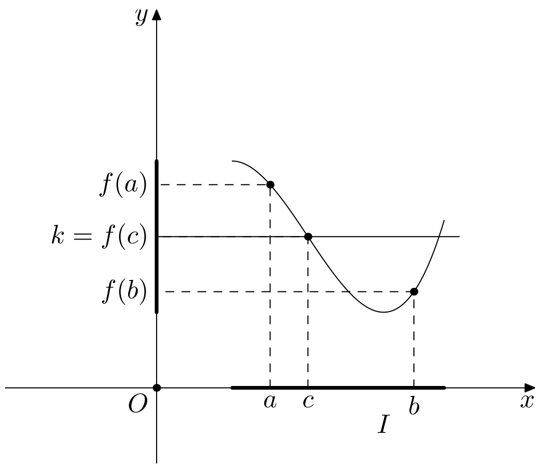
Propriété 1. Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

Remarques : La réciproque est fausse...pensez à la fonction racine carrée ou valeur absolue en zéro.

4.2 Continuité et résolution d'équations

Si dans le cas d'une fonction trinôme on sait résoudre algébriquement l'équation d'inconnue x, $f(x) = k$, on ne sait pas le faire en général. On se tourne alors vers l'Analyse. Celle-ci permet dans certains cas de prouver l'existence ensuite, lorsqu'une solution existe, d'obtenir des valeurs approchées de cette solution avec une précision voulue. La suite de cette section précise dans certains cas comment l'Analyse fournit l'existence de solution.

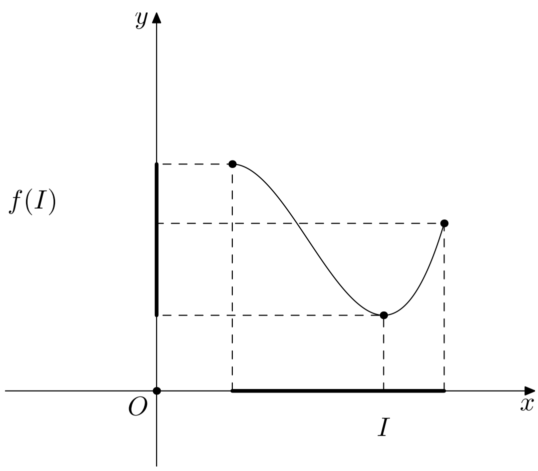
Théorème 4. *des valeurs intermédiaires (admis)*
f est une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. Alors, f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. C'est-à-dire, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$, tel que $f(c) = k$.



Définition 3. f est une fonction, D un sous-ensemble de son ensemble de définition. On appelle image de D par f, l'ensemble noté $f(D)$, défini par $f(D) = \{f(x) \text{ avec } x \in D\}$.

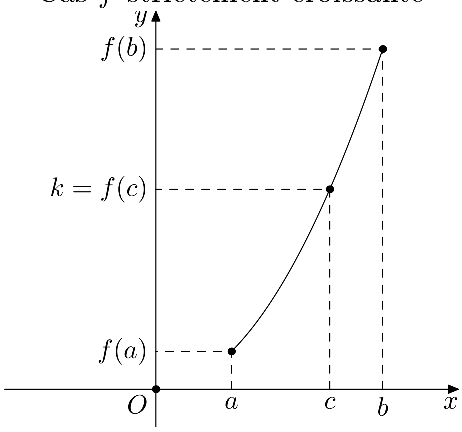
Corollaire 2. L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction f continue est un intervalle

Preuve.
Rappelons qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est caractérisé par le fait que, s'il contient deux réels x et y vérifiant $x < y$ alors il contient tout réel z vérifiant $x < z < y$.
Soit $(x; y)$ un couple d'éléments de $f(I)$ vérifiant $x < y$. Il existe (par définition de $f(I)$) deux réels a et b dans I tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$.
Soit z vérifiant $x < z < y$, démontrons que $z \in f(I)$: d'après ce qui précède z se trouve entre $f(a)$ et $f(b)$ et f est continue sur $[a; b]$ (puisqu'elle est continue sur I) donc d'après le T.V.I il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $z = f(c)$. Ainsi $z \in f(I)$ qui est donc un intervalle. Rappelons ensuite □



Lorsque f est monotone, on peut préciser le théorème des valeurs intermédiaires.

Cas f strictement croissante



Théorème 5. *f est une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a;b]$, tel que $f(c) = k$.*

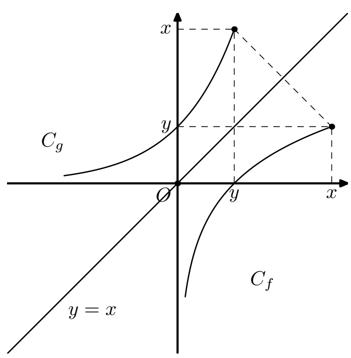
Preuve.
D'après le théorème précédent la solution existe. Par stricte monotonie de f sur $[a;b]$ elle est unique. □

Le théorème précédent s'étend à un intervalle I quelconque, nous l'admettrons. Ainsi l'image par une fonction continue d'un intervalle I quelconque est un intervalle, J, et pour tout réel $k \in J$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(x) = k$. On dit alors que la fonction f réalise **une bijection** de I sur J. Le tableau suivant précise l'intervalle $J = f(I)$ dans chacun des cas possibles pout I. Par définition l'image d'un intervalle I est l'ensemble des $f(x)$ lorsque x décrit I, on la note $f(I)$.
(On admet de plus que les limites indiquées existent...)

	L'image de I par f est l'intervalle :	
$I =$	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x); f(a)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x); \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x); \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

5 Notion de fonction ou bijection réciproque

f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Posons $J = f(I)$, J est aussi un intervalle d'après la section précédente et de plus pour tout $y \in J$ il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
On peut alors définir une fonction g de J dans I définie par $g(y) = x$, la situation peut être shématisée comme suit :



$$\begin{tikzcd} g(y)=x \arrow[r, bend left, "f"] & y=f(x) \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Il est alors clair que pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$, autrement dit, $g \circ f = \mathrm{Id}_I$ et, pour tout $y \in J$, $f(g(y)) = y$, autrement dit, $f \circ g = \mathrm{Id}_J$.
On dit que la fonction g est **la fonction ou bijection réciproque** de la fonction f. Il va de soi, que dans ces conditions f est la fonction réciproque de g....

Exercice 2

1. Exhibez une fonction de référence, qui réalise une bijection sur un intervalle que vous préciserez, et sa fonction réciproque.
2. Exhibez une fonction de référence qui n'est pas une bijection sur un intervalle que vous préciserez.
3. Démontrez que, dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, les courbes de f et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.