Équations et inéquations du second degré

1 Résolution de l'équation du second degré

1.1 Définition, vocabulaire

Une **équation du second degré**, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, où a, b, c sont trois réels donnés, a étant différent de zéro.
Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2.
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$; c'est trouver tous les nombres réels u tels que $au^2 + bu + c = 0$. Un tel nombre est dit **solution** ou **racine** de l'équation ou encore **racine** ou **zéro** du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Si f est un trinôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ c'est déterminer les éventuels antécédents de 0 par f.

1.2 Résolution de l'équation du second degré

1.2.1 Principe de résolution sur deux exemples

1. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$, $3x^2 - 5x - 4 = 0$.
Posons $f(x) = 3x^2 - 5x - 4$, alors pour tout réel x,
$f(x) = 3\left[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}\right]$,
or $x^2 - \frac{5}{3}x$ est le début d'un carré, car $x^2 - \frac{5}{3}x = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}$.
Ainsi pour tout réel x,
$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{4}{3}\right]$
$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{73}{36}\right]$
$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6}\right)\right]$
$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{5+\sqrt{73}}{6}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{73}}{6}\right)\right]$.
Il en résulte que $f(x) = 0$ équivaut à $x = \frac{5+\sqrt{73}}{6}$ ou à $x = \frac{5-\sqrt{73}}{6}$. De plus on a obtenu une factorisation de $f(x)$.

2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$, $2x^2 + 3x + 4 = 0$.
Posons $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, alors pour tout réel x,
$f(x) = 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right]$,
or $x^2 + \frac{3}{2}x$ est le début d'un carré, car $x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$.
Ainsi pour tout réel x,
$f(x) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 2\right]$
$f(x) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]$
Il est clair qu'avec cette factorisation de $f(x)$ l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

1.2.2 Cas général

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

1. 1^{ere} étape : Forme canonique de $f(x)$
Puisque $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$; or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ car $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
Cette dernière écriture de $f(x)$ sous la forme $a[(x+\square)^2 - \bigcirc]$ est la **forme canonique de** $f(x)$.

2. 1^{ieme} étape : Résolution
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, ainsi $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.
   - Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$, le nombre entre crochets est strictement positif donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   - Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, ainsi $f(x) = 0$ équivaut à $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ équivaut à $x + \frac{b}{2a} = 0$ soit $x = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta < 0$, alors $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ et $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \sqrt{\frac{\Delta}{2a}}^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
   Si l'on pose $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
   Puisque $a \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Définition 1

1. *Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ou du trinôme $ax^2 + bx + c$. On le note Δ (lire "delta").*
2. *L'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est la forme canonique de $f(x)$.*

Théorème 1 *Racine de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$*
Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine.
Lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une racine, $-\frac{b}{2a}$.
Lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Comment résoudre des équations du second degré ?

1. En général, mais pas toujours (voir plus bas), on calcule le discriminant Δ et on utilise les formules du théorème.

$x^2 - 3x + 4 = 0$	$3x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{48} = 0$	$3x^2 - x - 4 = 0$
$a = 1, b = -3, c = 4$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$ $\Delta < 0$, pas de solution.	$a = 3, b = -\frac{7}{2}, c = \frac{49}{48}$ $\Delta = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 3 \times \frac{49}{48} = 0$ $\Delta = 0$,une solution $-\frac{b}{2a} = \frac{7}{12}$.	$a = 3, b = -1, c = -4$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49$ $\Delta > 0$, deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4}{3}$

2. Il n'est pas toujours utile (ni judicieux) de calculer Δ, c' est le cas des équations suivantes :

- $4x^2 - 5 = 0$
- $7x^2 + 3x = 0$
- $-3(x-1)(x+2) = 0$

2 Comment relier les racines et les coefficients du trinôme ?

Propriété 1

- *Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ a deux racines x_1 et x_2, alors* $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ *et* $\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$.
- *Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution x_0, alors* $\boxed{x_0 + x_0 = -\frac{b}{a}}$ *et* $\boxed{x_0 x_0 = \frac{c}{a}}$.

Preuve

$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
Le calcul est trivial pour le deuxième cas.

Remarque : Il est utile de retenir que si on connaît a priori une racine alors on peut savoir à l'aide de ces formules si c'est la seule ou non et, dans ce cas, obtenir la valeur de la deuxième.
Par exemple, si on remarque que 1 est racine de l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ comme $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4$ alors 4 est aussi solution de l'équation. Comme elle en a au plus deux la résolution est terminée.

3 Factorisation et signe du trinôme

3.1 Factorisation du trinôme

D'après la démonstration du théorème 1 on peut établir le théorème suivant :

Théorème 2 *Notons $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$*
- *Lorsque $\Delta < 0$, la factorisation de $f(x)$ (à coefficients réels) n'est pas possible.*
- *Lorsque $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est la forme factorisée de $f(x)$.*
- *Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est la forme factorisée de $f(x)$.*

3.2 Signe du trinôme

Théorème 3

1. *Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a.*
2. *Lorsque $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sauf lorsque $x = -\frac{b}{2a}$ auquel cas $f(x) = 0$.*
3. *Lorsque $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a* **sauf** *lorsque x est entre les solutions de $f(x) = 0$ où $f(x)$ est du signe de $-a$.*

Preuve

- Cas $\Delta < 0$: la forme canonique de $f(x)$ est $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Comme $\Delta < 0$ le nombre entre crochets est strictement positif, donc $f(x)$ est du signe de a pour tout x.
- Cas $\Delta = 0$: la forme factorisée de $f(x)$ est $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]$ donc $f(x)$ est du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ où il est nul.
- Cas $\Delta > 0$: la forme factorisée de $f(x)$ est $a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Si, par exemple, x_1 est la plus petite de ces deux racines on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

4 Fonction trinôme du second degré

Théorème 4
La courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, de la fonction trinôme du second degré $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, est une parabole. Cette parabole est "tournée vers le haut" si $a > 0$ et "tournée vers le bas" si $a < 0$. Son sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$ et la droite d'equation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de cette courbe.

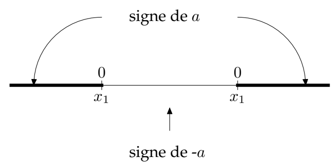
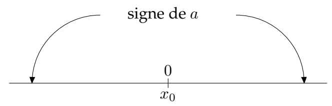
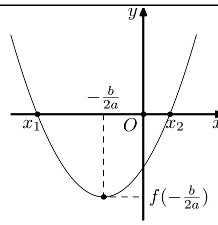
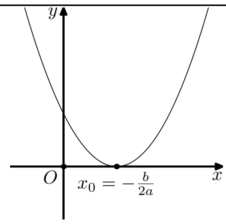
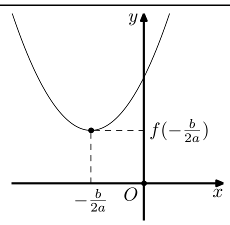
Preuve

détaillée en cours.

Remarque : la rédaction de ce théorème sous-entend que le vecteur $\overrightarrow{j}$ du repère est dirigé vers le haut. Ainsi le signe de a nous renseigne sur l'allure de la courbe. Le signe de Δ nous renseigne sur le nombre de points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. En effet :

- si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions donc la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.
- si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution donc la courbe et l'axe des abscisses n'ont qu'un point commun.
- si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions donc la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points.

Le tableau suivant illustre les cas possibles :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
factorisation de $f(x)$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	pas de factorisation
équation $f(x)=0$	2 solutions x_1 et x_2	une solution x_0	pas de solution
signe de $f(x)$			
courbes pour $a > 0$			
courbes pour $a < 0$