Généralités sur les fonctions

1 Rappels

1.1 Définition

Définition 1
D désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (en général un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$), **définir une fonction** *f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D, un unique réel (c'est-à-dire un et un seul) noté $f(x)$.*
On dit que D est **l'ensemble de définition** *de f ou bien que f est définie sur D.*
L'unique réel, $f(x)$, associé à x, s'appelle l'image de x par la fonction f.
b désigne un réel, tout réel x (s'il en existe), tel que $f(x) = b$ s'appelle un antécédent de x par la fonction f.

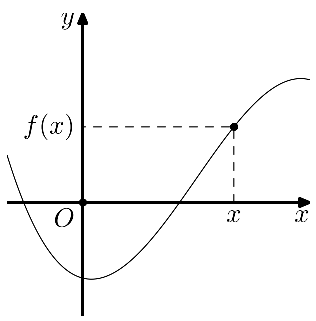
Remarques :
– On peut utiliser un diagramme pour schématiser cette association :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

– Lorsque l'ensemble de définition n'est pas précisé, il est, par convention, constitué de tous les réels x qui ont une image par la fonction. Lorsque l'on recherche tous ces réels x on dit que l'on détermine l'ensemble de définition de la fonction.
– Il faut remarquer l'importance de l'article défini dans l'expression "l'image" et de l'article indéfini dans l'expression "un antécédent". (De façon générale, sans une bonne maîtrise d'au moins une langue vivante, faire des mathématiques est illusoire. . .)

1.2 Courbe représentative

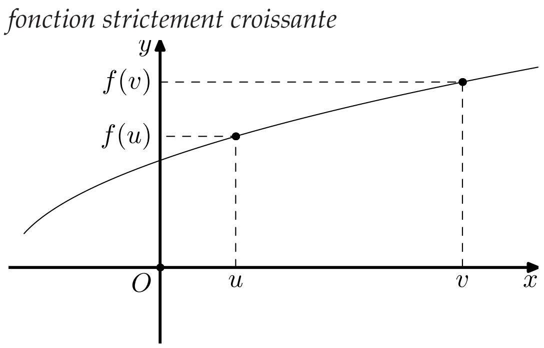
Définition 2 *f est une fonction définie sur un ensemble D.*
– *La courbe représentative de f dans un repère (cartésien) orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ avec x élément de D. Ainsi, dire que $M(x; y)$ appartient à cette courbe équivaut à dire que $x \in D$ et $y = f(x)$.*
– *La relation $y = f(x)$ est appelée* **l'équation cartésienne** *de cette courbe dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Cette équation permet de savoir si un point quelconque du plan appartient ou non à cette courbe.*

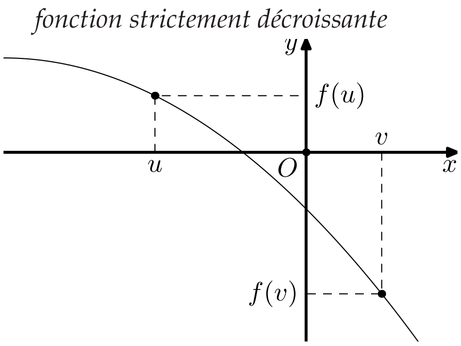


1.3 Sens de variation

Théorème 1 *f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

– *On dit que f est* **croissante** *sur I si quels que soient les réels u et v de I,*
$u < v$ *implique* $f(u) \leqslant f(v)$
– *On dit que f est* **décroissante** *sur I si quels que soient les réels u et v de I,*
$u < v$ *implique* $f(u) \geqslant f(v)$
– *On dit que f est* **monotone** *sur I si elle est croissante ou décroissante sur I*
– *On dit que f est* **strictement croissante** *sur I si quels que soient les réels u et v de I,*
$u < v$ *implique* $f(u) < f(v)$
– *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur I si quels que soient les réels u et v de I,*
$u < v$ *implique* $f(u) > f(v)$
– *On dit que f est* **strictement monotone** *sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I*





1.4 Fonctions de référence

On appelle, en seconde, fonctions de références, les six fonctions suivantes :

f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = ax + b$	f_4 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = \|x\|$
f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^2$	f_5 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_5(x) = \sqrt{x}$
f_3 définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$	f_6 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_6(x) = x^3$

Vous devez être capables d'esquisser très rapidement la courbe représentative de chacune de ces fonctions dans un repère orthogonal, et de reconnaître la courbe représentative de chacune de ces fonctions.

Définition 3 *Une fonction f définie sur D est paire si quel que soit x dans D, alors $-x$ est aussi dans D et $f(-x) = f(x)$. Dans ce cas la courbe représentant f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Définition 4 *Une fonction f définie sur D est impaire si quel que soit x dans D, alors $-x$ est aussi dans D et $f(-x) = -f(x)$. Dans ce cas la courbe représentant f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

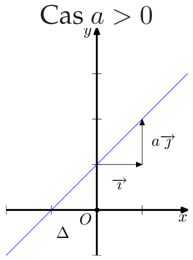
1.4.1 Fonction affine

Définition 5 *Une fonction affine est une fonction $f : x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont deux réels fixés.*

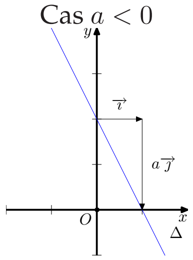
Propriété 1
- *Si $a > 0$, f est strictement* **croissante sur** $\mathbb{R}$.
- *Si $a < 0$, f est strictement* **décroissante sur** $\mathbb{R}$.
- *Si $a = 0$, f est* **constante sur** $\mathbb{R}$.

Définition 6 *La courbe représentant une fonction affine dans un repère orthogonal est une* **droite**.*(parallèle à l'axe des abscisses lorsque $a = 0$)*

Cas $a > 0$



Cas $a < 0$



1.4.2 Fonction "carré"

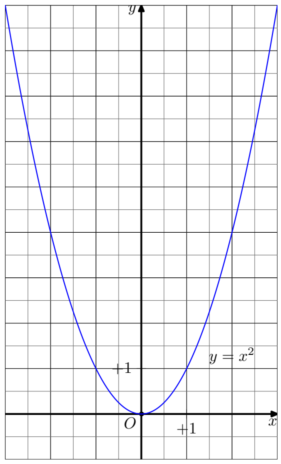
Définition 7 *C'est la fonction* $f : x \longmapsto x^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 2
- f *est strictement* **croissante sur** $[0; +\infty[$, *ce qui signifie que* **deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.**
- f *est strictement* **décroissante sur** $]\infty; 0]$, *ce qui signifie que* **deux réels négatifs sont rangés dans l' ordre contraire de leurs carrés.**
- f *est une fonction paire car pour tout* x *réel,* $(-x)^2 = x^2$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

Définition 8 *La courbe représentant la fonction "carré" dans un repère orthogonal est appelée une* **parabole**



1.4.3 Fonction "inverse"

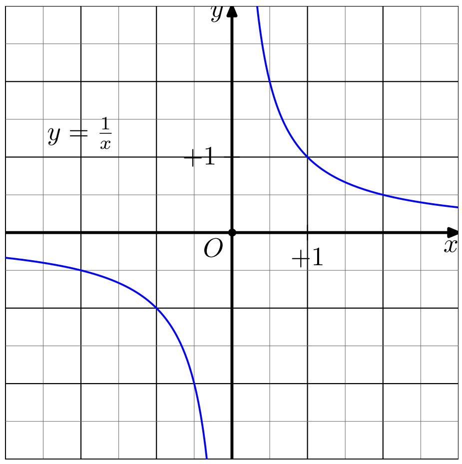
Définition 9 *C'est la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Propriété 3
- f *est strictement* **décroissante sur** $]0; +\infty[$, *ce qui signifie que* **deux réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.**
- f *est strictement* **décroissante sur** $]\infty; 0]$, *ce qui signifie que* **deux réels strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.**
- f *est une fonction impaire car pour tout* x *réel non nul,* $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	‖	↘	0

Définition 10 *La courbe représentant la fonction "inverse" dans un repère orthogonal est appelée une* **hyperbole**, *et chacun des deux "morceaux" de la courbe est appelé une branche de l'hyperbole.*



1.4.4 Fonction valeur absolue

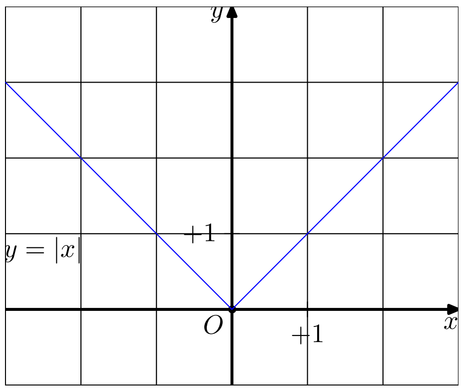
Définition 11 *C'est la fonction* $f : x \longmapsto |x|$ *définie sur* $\mathbb{R}$. *(Si* $x \geqslant 0$ *alors* $|x| = x$ *et si* $x < 0$ *alors* $|x| = -x$*)*

Propriété 4
- *f est une fonction affine par morceaux.*
- *f est strictement* **croissante sur** $[0; +\infty[$, *ce qui signifie que* **deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs valeurs absolues**
- *f est strictement* **décroissante sur** $]\infty; 0]$, *ce qui signifie que* **deux réels négatifs sont rangés dans l' ordre contraire de leurs valeurs absolues.**
- *f est une fonction paire car pour tout x réel on a* $|-x| = |x|$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Définition 12 *La courbe représentant la fonction "carré" dans un repère orthogonal est la réunion de deux demi-droites.*



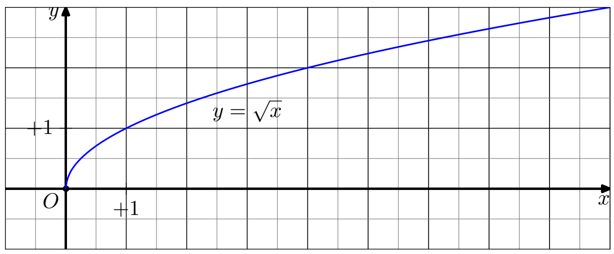
1.4.5 Fonction "racine carrée"

Définition 13 *C'est la fonction* $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ *définie sur* $[0; +\infty[$.

Propriété 5
- *f est strictement* **croissante sur** $[0; +\infty[$, *ce qui signifie que* **deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.**

Son tableau de variations est :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	



1.4.6 Fonction "cube"

Définition 14 *C'est la fonction* $f : x \longmapsto x^3$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 6

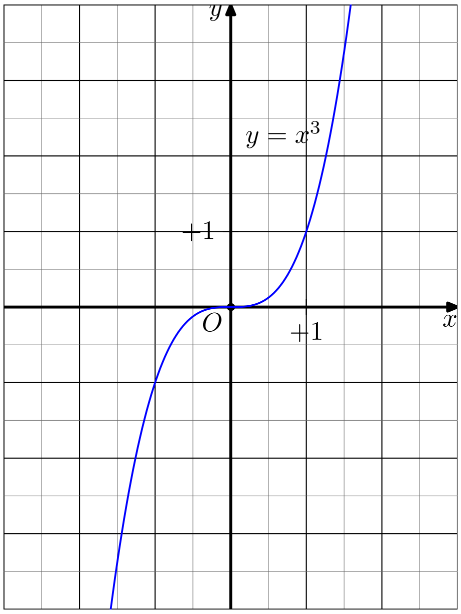
– f *est strictement* **croissante sur** $\mathbb{R}$, *ce qui signifie que*
deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.

– f *est une fonction impaire car pour tout* x *réel*, $(-x)^3 = -x^3$.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Définition 15 *La courbe représentant la fonction "cube" dans un repère orthogonal est appelée une* **cubique**



2 Opérations sur les fonctions

2.1 Opérations algébriques sur les fonctions

Définition 16 *Dire que deux fonctions* f *et* g *sont égales, signifie qu'elles ont le même ensemble de définition,* $\mathcal{D}$, *et que pour tout* x *de* $\mathcal{D}$, $f(x) = g(x)$. *On note alors* $f = g$.

Remarques :

Par exemple, les fonctions $f\ : x \longmapsto |x|$ et $g\ : x \longmapsto \sqrt{x^2}$ sont égales car elles sont toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

En revanche les fonctions $f\ : x \longmapsto x^2 + 3$ et $f\ : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 3x}{x}$ ne sont pas égales car $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 0$ mais g n'est pas définie en 0 alors que f l'est.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dites si les fonctions f et g sont égales ou non :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{(x+1)(x-1)}$ et $g(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x^2 - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ et $g(x) = x - 2$
3. $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$ et $g(x) = |x - 3|$

Définition 17 f *et* g *sont deux fonctions définies respectivement sur* $\mathcal{D}_f$ *et* $\mathcal{D}_g$. *Lorsque* x *appartient à la fois à* $\mathcal{D}_f$ *et à* $\mathcal{D}_g$, x *a une image par* f *et une image par* g. *Les opérations algébriques (somme, produit,. . .) que l'on peut effectuer avec* $f(x)$ *et* $g(x)$ *induisent naturellement des opérations algébriques sur les fonctions.*

opération	*notation*	*définition*	*définie pour*
somme	$f + g$	$x \longmapsto f(x) + g(x)$	$x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
différence	$f - g$	$x \longmapsto f(x) - g(x)$	
produit	fg	$x \longmapsto f(x)g(x)$	
quotient	$\dfrac{f}{g}$	$x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ *et* $g(x) \neq 0$

Exemple :
La somme des fonctions $f\ :x\longmapsto 3x+1$ et $g\ :x\longmapsto -3x^2$ est la fonction $h\ :x\longmapsto -3x^2+3x+1$.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$.

1. Déterminez l'ensemble de définition et l'image de x pour chacune des fonctions suivantes : $f+g$; fg ; $f-g$; $\dfrac{f}{g}$.
2. Écrivez $h\ :x\longmapsto \dfrac{1}{x^2}+2\sqrt{x}-3x^4$ comme la somme de fonctions usuelles.

2.2 Fonctions polynômes

Définition 18
a est un réel et n un entier naturel.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^n$ est appelée **fonction monôme** *de coefficient a . Lorsque a est non nul, n est le degré de cette fonction monôme.*
Par abus de langage, l'expression ax^n (c'est-à-dire $f(x)$) est appelée **monôme** *de coefficient a et de degré n si a est non nul.*
Une **fonction polynôme** *est une somme de fonctions monômes. Si p est une fonction polynôme, par abus de langage, $p(x)$ est appelé polynôme.*

Exemple :
La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=x^4-2x^2+10$ est une fonction polynôme.
Remarques :

– p est une fonction polynôme non nulle. Si $p(x)$ comporte plusieurs monômes de même degré, on les regroupe en effectuant leur addition. On dit que l'on **réduit** le polynôme. Habituellement, on **ordonne** ensuite les différents monômes en les rangeant dans l'ordre des puissances décroissantes. Il existe alors un monôme de degré le plus élevé : c'est le **degré** de la fonction polynôme p (ou du polynôme $p(x)$).
  Ainsi, l'écriture générale d'un polynôme de degré 5 est de la forme $ax^5+bx^4+cx^2+dx+e$ où a,b,c,d,e sont des réels fixés.
  Toute fonction affine est une fonction polynôme de degré 1,
  La fonction "carrée" est une fonction polynôme de degré 2.

– La somme, le produit, la différence de deux fonctions polynômes est encore une fonction polynôme. En revanche le quotient de deux fonctions polynômes n'est pas en général une fonction polynôme : on dit que c'est une **fonction rationnelle**.

2.3 Composition de fonctions

Exemple :
f et g sont les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.
Pour tout réel x, $f(x)$ appartient à $[0;+\infty[$ donc on peut calculer l'image de $f(x)$ par $g(x)$, $g(f(x))=\sqrt{x^2}$. On obtient ainsi une nouvelle fonction qui à x associe $\sqrt{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ que l'on appelle la composée de f suivie de g.
Plus généralement,

Théorème 2 *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.*
La fonction $g\circ f$ (lire g "rond" f) est la fonction définie par $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.
Cette fonction est définie sur l'ensemble des réels x appartenant à $\mathcal{D}_f$ tels que $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}_g$.

Remarques :
– L'ensemble de définition de $g\circ f$ est donc à étudier au cas par cas.
– De façon générale on a $g\circ f\neq f\circ g$. (Considérez par exemple les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x$)
– On dit que la fonction $g\circ f$ est la composée de f suivie de g. (En effet on applique d'abord f pour calculer $f(x)$ puis ensuite on applique g pour calculer $g(f(x))$).

3 Compléments sur le sens de variation

3.1 Sens de variation d'une somme de fonctions

Théorème 3
La somme de deux fonctions strictement croissantes sur un intervalle I est une fonction strictement croissante sur I.

La somme de deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I est une fonction strictement décroissante sur I.

Preuve

Démontrons la première assertion de ce théorème.
a et b sont deux réels de I tels que $a < b$. f et g sont strictement croissantes sur I donc $f(a) < f(b)$ et $g(a) < g(b)$. En additionnant membre à membre ces deux inégalités on obtient $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$, ce qui prouve que $f + g$ est strictement croissante sur I.

Remarque :
On ne peut pas, en général, avec les hypothèses précédentes, en déduire les sens de variations de $f - g$ ou de fg de ceux de f et g.

3.2 Sens de variation de $u + \lambda$ et λu

u est une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. $u + \lambda$ et λu sont les fonctions définies sur I respectivement par $x \longmapsto u(x) + \lambda$ et $x \longmapsto \lambda u(x)$.

Théorème 4
u et $u + \lambda$ ont le même sens de variation sur I.
Si $\lambda > 0$, u et λu ont le même sens de variation sur I.
Si $\lambda < 0$, u et λu ont des sens de variation contraires sur I.

Preuve

immédiat.

Exemple :
a est un réel non nul,
- lorsque $a > 0$, la fonction $x \longmapsto ax^2$ a même sens de variation que la fonction $x \longmapsto x^2$.
- lorsque $a < 0$, la fonction $x \longmapsto ax^2$ varie en sens contraire de la fonction $x \longmapsto x^2$.

On admet de plus que la courbe de toute fonction $x \longmapsto ax^2$ est une parabole. Il en résulte que,
- lorsque $a > 0$, la fonction $x \longmapsto ax^2$ est représentée par une parabole tournée vers le haut.
- lorsque $a < 0$, la fonction $x \longmapsto ax^2$ est représentée par une parabole tournée vers le bas.

3.3 Sens de variation d'une fonction composée

Théorème 5 *f et g sont deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J et strictement monotones sur ces intervalles. On suppose que pour tout $x \in J$ on a $g(x) \in I$ (afin de pouvoir composer g suivie de f). Dans ces conditions la fonction $f \circ g$ est définie sur J et :*

1. *Lorsque f et g ont le même sens de variation, alors $f \circ g$ est strictement croissante sur J*
2. *Lorsque f et g ont des sens de variation différents alors $f \circ g$ est strictement décroissante sur J*

preuve :
- Premier cas : f et g ont le même sens de variation.
  Considérons deux réels a et b dans J tels que $a < b$.
  1. Supposons f et g strictement croissantes, f sur I et g sur J.
     Puisque g est strictement croissante sur J, on a $a < b$ donc $g(a) < g(b)$.
     Puisque f est strictement croissante sur I, on a $g(a) < g(b)$ donc $f(g(a)) < f(g(b))$
     Conclusion : Quels que soient a et b dans J avec $a < b$ alors $f(g(a)) < f(g(b))$ donc $f \circ g$ est strictement croissante sur J.
  2. Supposons f et g strictement décroissantes, f sur I et g sur J.
     Puisque g est strictement décroissante sur J, on a $a < b$ donc $g(a) > g(b)$.
     Puisque f est strictement décroissante sur I, on a $g(a) > g(b)$ donc $f(g(a)) < f(g(b))$
     Conclusion : Quels que soient a et b dans J avec $a < b$ alors $f(g(a)) < f(g(b))$ donc $f \circ g$ est strictement croissante sur J.
- Deuxième cas : f et g ont des sens de variation différents.
  Considérons deux réels a et b dans J tels que $a < b$.
  1. Supposons f strictement croissante sur I et g strictement décroissante sur J.
     Puisque g est strictement décroissante sur J, on a $a < b$ donc $g(a) > g(b)$.
     Puisque f est strictement croissante sur I, on a $g(a) > g(b)$ donc $f(g(a)) > f(g(b))$
     Conclusion : Quels que soient a et b dans J avec $a < b$ alors $f(g(a)) > f(g(b))$ donc $f \circ g$ est strictement décroissante sur J.

2. Supposons f strictement décroissante sur I et g strictement croissante sur J.
Puisque g est strictement croissante sur J, on a $a < b$ donc $g(a) < g(b)$.
Puisque f est strictement décroissante sur I, on a $g(a) < g(b)$ donc $f(g(a)) > f(g(b))$
Conclusion : Quels que soient a et b dans J avec $a < b$ alors $f(g(a)) > f(g(b))$ donc $f \circ g$ est strictement décroissante sur J.

4 Fonctions associées et courbes représentatives

u est une fonction définie sur un ensemble D et λ un réel. $\mathcal{C}$ est la courbe de u dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$du plan.

Théorème 6

- *La courbe, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $x \longmapsto -u(x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la réflexion d'axe, l'axe des ordonnées.*
- *La courbe, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $x \longmapsto u(-x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la réflexion d'axe, l'axe des abscisses.*
- *La courbe, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $x \longmapsto |u(x)|$ coïncide avec $\mathcal{C}$ lorsque celle-ci est au-dessus de l'axe des abscisses et est l'image de $\mathcal{C}$ par la réflexion d'axe, l'axe des abscisses, lorsque $\mathcal{C}$ est en-dessous de l'axe des abscisses.*
- *La courbe, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $x \longmapsto u(x) + \lambda$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\lambda\vec{\jmath}$.*
- *La courbe, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de la fonction $x \longmapsto u(x + \lambda)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-\lambda\vec{\imath}$.*

Preuve

détaillée en exercice.