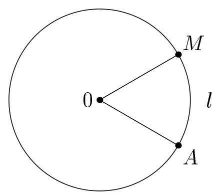
Angles orientés et repérage polaire dans le plan

1 Angles orientés

1.1 Rappels

1.1.1 Le radian

Définition 1. Le **radian** est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angles. Elle est définie de la façon suivante :
A et M sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon r ; l désigne la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM}$.
La **mesure en radians** de l'angle $\widehat{AOM}$ est le réel $\alpha = \dfrac{l}{r}$.



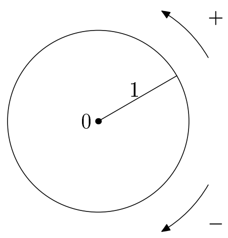
Remarques :

1. Un angle de 1 radian intercepte donc un arc de cercle de longueur égale au rayon.
2. Le cas particulier $r = 1$ est intéressant car alors $l = \alpha$. Ainsi, dans ce cas, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est égale à la longueur de l'arc géométrique $\widehat{AM}$.
3. Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians.

1.1.2 Cercle trigonométrique

Définition 2. Un cercle orienté est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct ou positif et le sens indirect ou négatif.

Définition 3. Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le sens direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre.



1.1.3 Le plan orienté

Définition 4. Le plan est dit orienté lorsque tous les cercles sont orientés comme un cercle trigonométrique.

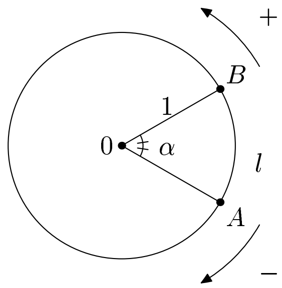
Dans la suite le plan est orienté.

1.2 Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

1.2.1 Approche

1. **Mesures positives**

a. $\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O ; A et B sont deux points de $\mathcal{C}$. Lorsqu'on fait fait tourner $\overrightarrow{OA}$ dans **le sens direct** pour l'amener sur $\overrightarrow{OB}$, le point A parcourt un arc de cercle de longueur l (Comme le rayon du cercle est 1, l est aussi, la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$).
On convient de dire que l est **une mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ ($\overrightarrow{OA}$ est écrit en premier pour indiquer que l'on part de A).



b. Dans chaque cas, placez sur un cercle trigonométrique les quatre points K, L, M, N tels que :

i. $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}})$; $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}})$; $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.

ii. $\frac{7\pi}{6}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}})$; $\frac{3\pi}{2}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}})$; $\frac{5\pi}{3}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.

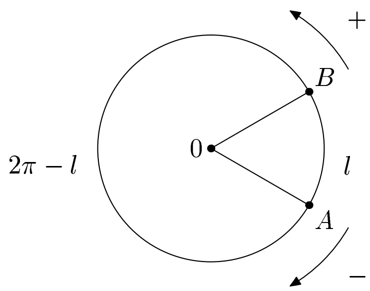
c. Après avoir fait fait tourner $\overrightarrow{OA}$ dans **le sens direct** pour l'amener sur $\overrightarrow{OB}$ une première fois, on peut faire un tour de plus, toujours dans le sens direct. Le point A parcourt un arc de cercle de longueur $l + 2\pi$.

On convient de dire que $l + 2\pi$ est **une mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$
Après être arrivé en B une première fois, si on effectue k tours de cercle, toujours dans le sens direct, le point A parcourt un trajet de longueur $l + 2k\pi$, ce nombre est aussi une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

d. Placez sur un cercle trigonométrique les quatre points K, L, M, N tels que :
$\frac{\pi}{3} + 2\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}})$; $\frac{5\pi}{6} + 4\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}})$; $\frac{27\pi}{4}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.

2. Mesures négatives

a. Mais pour amener $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$ on peut aussi parcourir le cercle dans **le sens indirect**. Alors lorsque $\overrightarrow{OA}$ arrive sur $\overrightarrow{OB}$ pour la première fois, le point A parcourt un arc de cercle de longueur $2\pi - l$.
Pour indiquer que l'on parcourt le cercle dans **le sens indirect** sans l'écrire, on convient de **"compter ce trajet négativement"** et de dire que $-(2\pi - l)$ est **une mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.



b. Dans chaque cas, placez sur un cercle trigonométrique les quatre points K, L, M, N tels que :

i. $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}})$; $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}})$; $-\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.

ii. $-\frac{7\pi}{6}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL}})$; $-\frac{3\pi}{2}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM}})$; $-\frac{5\pi}{3}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.

c. Après avoir fait fait tourner $\overrightarrow{OA}$ dans **le sens indirect** pour l'amener sur $\overrightarrow{OB}$ une première fois, on peut faire un tour de plus, toujours dans le sens indirect que l'on compte négativement.
On convient de dire que $-(2\pi - l) - 2\pi$ est **une mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

Après être arrivé en B une première fois, si on effectue k' tours de cercle, toujours dans le sens indirect direct, que l'on compte négativement, on obtient pour mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ le nombre réel $-(2\pi - l) - 2k'\pi$ ce qui s'écrit encore $l + 2(-k' - 1)\pi$.

d. Placez sur un cercle trigonométrique les quatre points K, L, M, N tels que :
$-\frac{5\pi}{3} - 2\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL}})$; $-\frac{7\pi}{6} - 4\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}})$; $-\frac{23\pi}{4}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

3. Ensemble des mesures
Pour amener $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$ on peut aussi faire une **partie du parcours dans le sens direct et une autre dans le sens indirect**. On démontre que tous les parcours permettant d'amener $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$ sont associés, par les procédés décrits ci-dessus, aux **nombres de la forme** $l + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

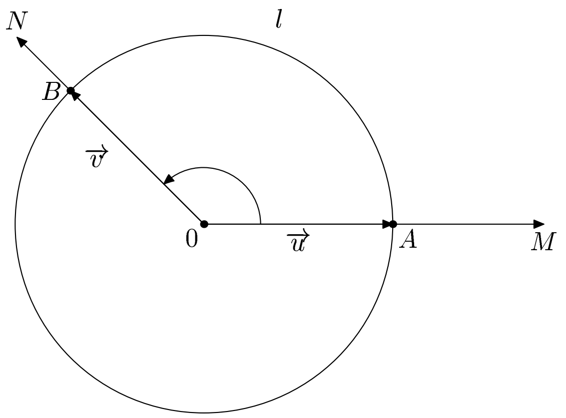
Ces nombres sont appelés **les mesures de l'angle orienté** $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.

Exercice 1

Placez sur un cercle trigonométrique les quatre points K, L, M, N tels que :
$\frac{5\pi}{3} - 2\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL}})$; $\frac{7\pi}{6} - 3\pi$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}})$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi - \frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

1.2.2 Cas général

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON}$ sont deux vecteurs non nuls réprésentés à partir d'un point O. Notons $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent $\mathcal{C}$ en A et B. Notons l la longueur de l'arc de cercle AB, parcouru de A vers B dans le sens trigonométrique.



Définition 5. Les nombres de la forme $l + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les mesures en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Remarques :

1. L'usage est de noter $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ au lieu de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ un angle orienté de vecteurs et aussi de confondre un angle avec l'une de ses mesures. On écrit, par exemple, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{3}$ ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{3}\,[\text{mod } 2\pi]$.
2. Si x est une mesure, toute autre mesure y s'écrit $y = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Mesure principale

Propriété 1.

1. Parmi toutes les mesures $l + 2k\pi$, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi; +\pi]$. Cette mesure est appelée la **mesure principale** de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
2. La valeur absolue de la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est égale à la mesure en radians de l'angle géométrique formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

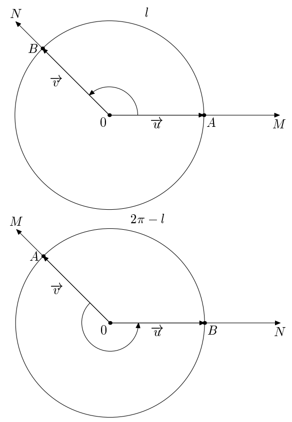
Preuve.

1. – Supposons que $0 \leqslant l \leqslant \pi$, alors $k = 0$ donne l'existence. L'unicité résulte du fait que si $k \geqslant 1$ alors $l+2k\pi \geqslant 2\pi$ et si $k \leqslant -1$ alors $l+2k\pi \leqslant -\pi$.

– Supposons que $\pi < l \leqslant 2\pi$, alors $k = -1$ donne l'existence. L'unicité résulte du fait que si $k \geqslant 0$ alors $l+2k\pi > \pi$ et si $k \leqslant -2$ alors $l+2k\pi \leqslant -2\pi$.

2. – Supposons que $0 \leqslant l \leqslant \pi$, d'après ce qui précède la mesure principale est l qui est aussi la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

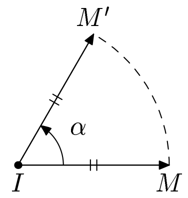
– Supposons que $\pi < l \leqslant 2\pi$, d'après ce qui précède la mesure principale est $l - 2\pi$ et sa valeur absolue est $2\pi - l$ (car $l - 2\pi$ est négatif) qui est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.



□

1.4 Rotation du plan orienté

Définition 6. I est un point fixé du plan et α un réel. La **rotation** de centre I et d'angle α, mesuré en radians, est la transformation du plan orienté telle que I est invariant et pour tout point $M \neq I$, son image M' est le point tel que $IM' = IM$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha$.



$\alpha = \frac{\pi}{3}$

2 Propriétés des angles orientés

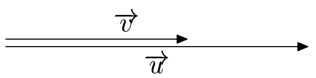
2.1 Angles et colinéarité

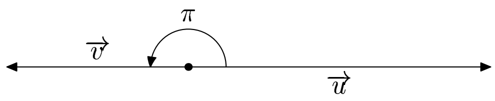
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ permet de traduire leur colinéarité car, d'après la définition des mesures d'un angle orienté :

$$(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \text{ et } (\vec{u}, -\vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) = \pi.$$

On en tire le théorème suivant :

Théorème 1.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens équivaut à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires équivaut à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

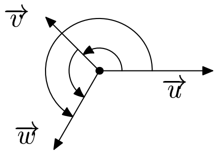




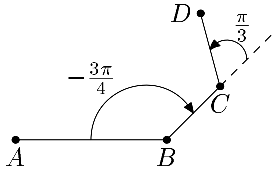
2.2 Relation de Chasles

Théorème 2. *(admis)*
Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *:* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

Selon cette relation de Chasles, en additionnant n'importe quelles mesures de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et de $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, on obtient une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. Réciproquement, toute mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ peut s'écrire comme la somme d'une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et d'une mesure de $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

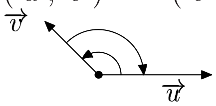


Exemple :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$,
donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$.

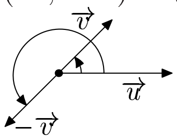


Propriété 2. Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

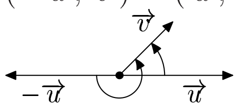
1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$



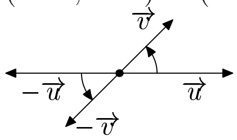
2. $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi$



3. $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi$



4. $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$



Preuve.

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ et selon la relation de Chasles, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0$ d'où le résultat.
2. $(\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}) = \pi$ et selon la relation de Chasles, $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v})$ d'où le résultat.
3. $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \pi$ et selon la relation de Chasles, $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'où le résultat.
4. Selon la relation de Chasles, $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v})$, donc $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 2\pi$ d'où le résultat.

□

2.3 Transformations usuelles et angles orientés

Définition 7.

- Dire qu'une transformation du plan conserve les angles orientés signifie que quels que soient les trois points du plan, distincts deux à deux, M, N, P d'images respectives M', N', P' alors $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.
- Dire qu'une transformation du plan change les angles orientés en leurs opposés signifie que quels que soient les trois points du plan, distincts deux à deux, M, N, P d'images respectives M', N', P' alors $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Propriété 3.

- Les translations, les homothéties et les rotations conservent les angles orientés.
- Une réflexion change un angle orienté en son opposé.

3 Lignes trigonométriques

3.1 Repère orthonormal direct

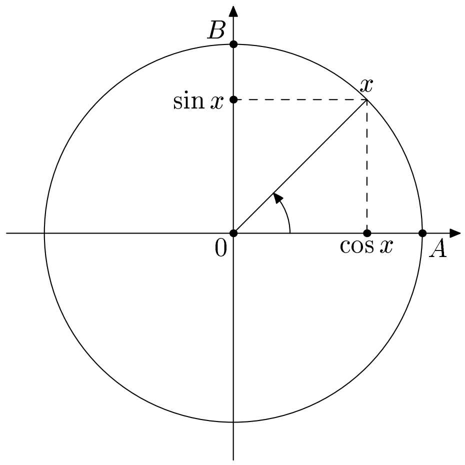
Définition 8. Un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$du plan est dit **direct** lorsque $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}) = \frac{\pi}{2}$, **indirect** lorsque $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}) = -\frac{\pi}{2}$.

3.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

3.2.1 Rappels : cosinus et sinus d'un réel

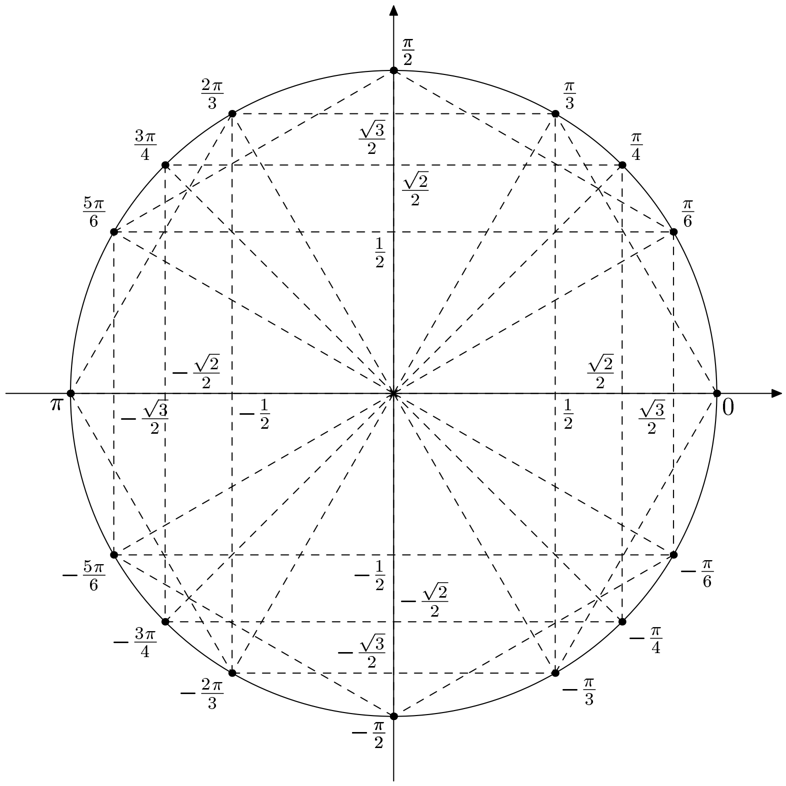
$\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique, A et B sont deux points de ce cercle tels que, si on pose $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{OB}$ alors le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$est orthonormal direct.

Définition 9.
x est un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M de $\mathcal{C}$ (on associe donc un point du cercle à x) tel que x soit une mesure en radians de $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{OM})$.
- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
- Le **sinus** de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.



Remarques :

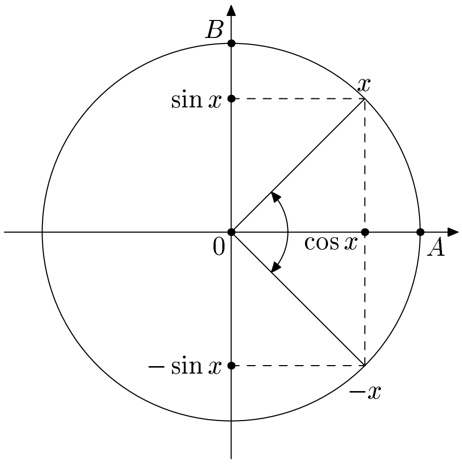
1. On dit certaines fois, pour associer un point du cercle trigonométrique à un réel, que l'on enroule l'ensemble des réels autour du cercle trigonométrique. La figure précédente illustre cette remarque.
2. Il est essentiel de retenir quelques valeurs de cosinus et sinus pour des réels paticuliers. La figure suivante donne les valeurs à connaître (Le calcul de chacune de ces valeurs repose sur la géométrie élémentaire… et quelques symétries…).

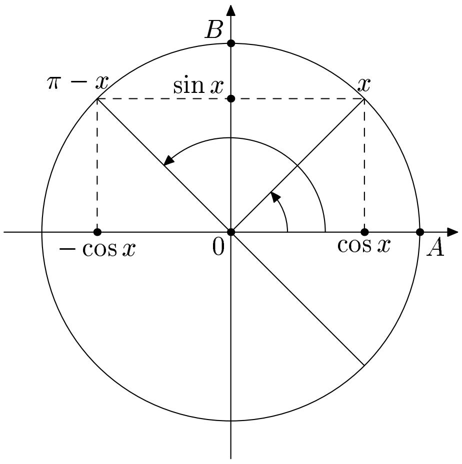


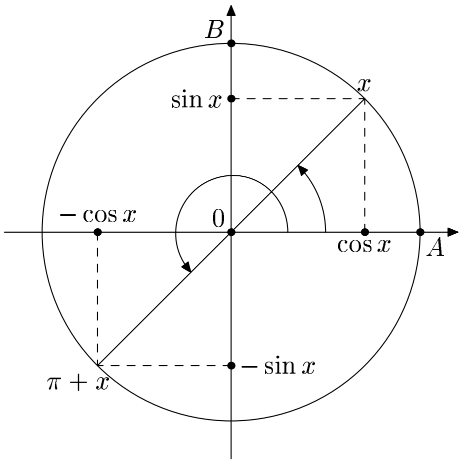
Proposition 1. Pour tout réel x :

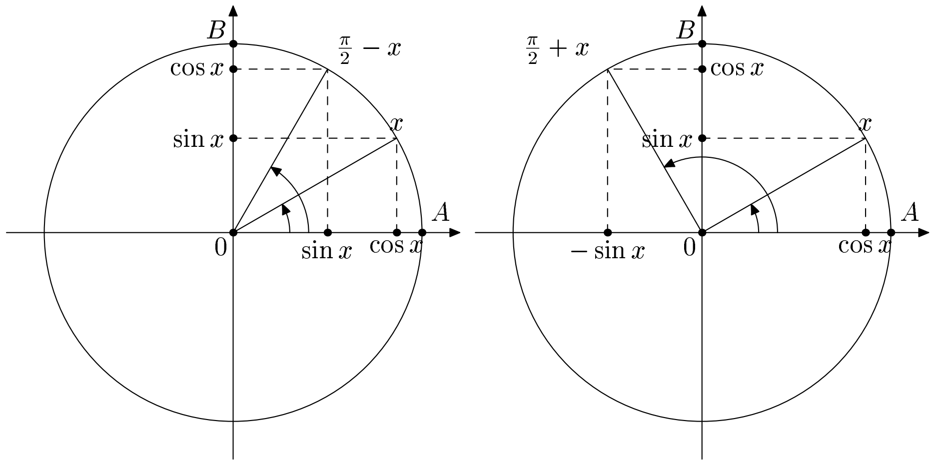
1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$
5. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
6. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Preuve.
Les figures suivantes illustrent cette proposition.







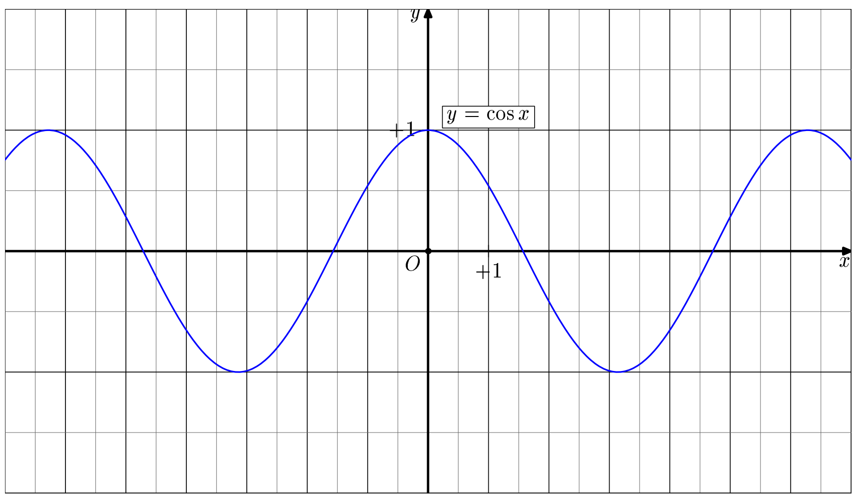


□

Définition 10. Fonction cosinus
La fonction **cosinus**, notée cos, est la fonction qui à tout réel x associe son cosinus.

$$\cos \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{array}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



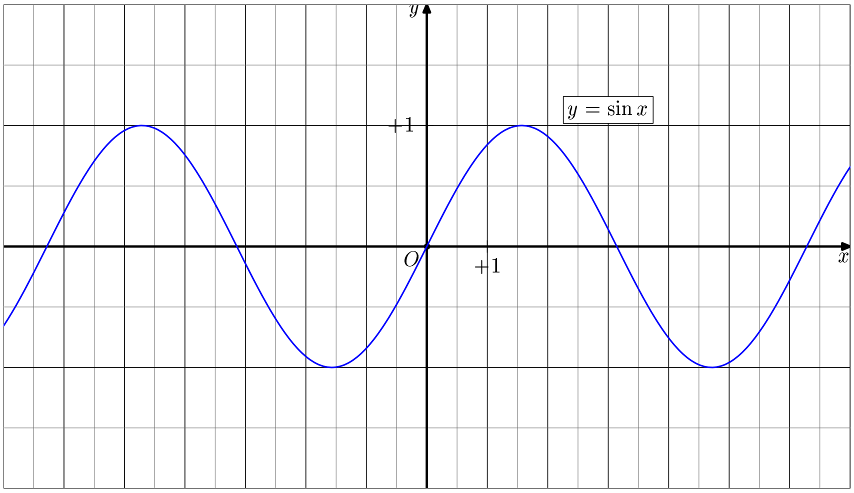
Exercice 2

Expliquez les propriétés (variations, symétrie, périodicité etc...) que vous remarquez sur cette représentation.

Définition 11. Fonction cosinus
La fonction **sinus**, notée sin, est la fonction qui à tout réel x associe son sinus.

$$\sin \ : \ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{array}$$

Sa courbe représentative est la suivante :



Exercice 3

Expliquez les propriétés (variations, symétrie, périodicité etc...) que vous remarquez sur cette représentation.

3.2.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

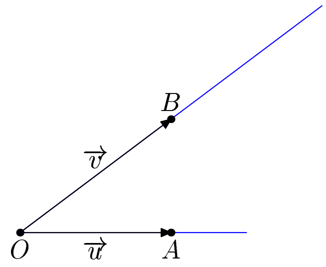
Si x désigne une mesure en radians d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors toute autre mesure est du type $x + 2k\pi$, avec k entier relatif. Comme la fonction cosinus est 2π périodique, alors $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. Il en résulte la définition suivante :

Définition 12. Le **cosinus** (respectivement le **sinus**) d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radians.

Le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ se note $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et le sinus, $\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

3.2.3 Lien entre cosinus d'un angle orienté et l'angle géométrique associé

Notons α la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$. Nous savons que $|\alpha| = \theta$ et que la fonction cosinus est paire donc $\cos\theta = \cos(|\alpha|) = \cos\alpha$.



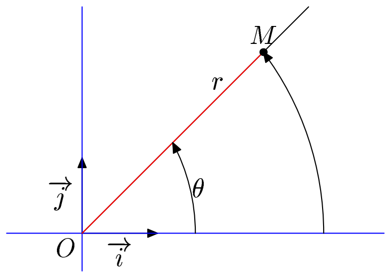
Propriété 4. L'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs ont le même cosinus.

Remarque :
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\widehat{AOB}$ n'ont **pas toujours le même sinus**. En effet la fonction sinus est impaire donc $\sin|\alpha| = \sin\alpha$ si α est positif et $\sin|\alpha| = -\sin\alpha$ si α est négatif. Ainsi les sinus de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\widehat{AOB}$ sont égaux ou opposés.

4 Repérage polaire

4.1 Coordonnées polaires d'un point

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$est un repère orthonormal direct. Si M est distinct du point O alors M peut-être repéré par l'angle $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et la longueur $r = OM$.
Réciproquement, la donnée d'un couple $(r;\theta)$ avec $r > 0$ et θ un réel quelconque détermine un seul point M tel que $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$.



Définition 13. Pour tout point M distinct de O, un couple $(r;\theta)$ tel que $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et $r = OM$ est un couple de **coordonnées polaires** de M. On note $M[r;\theta]$.

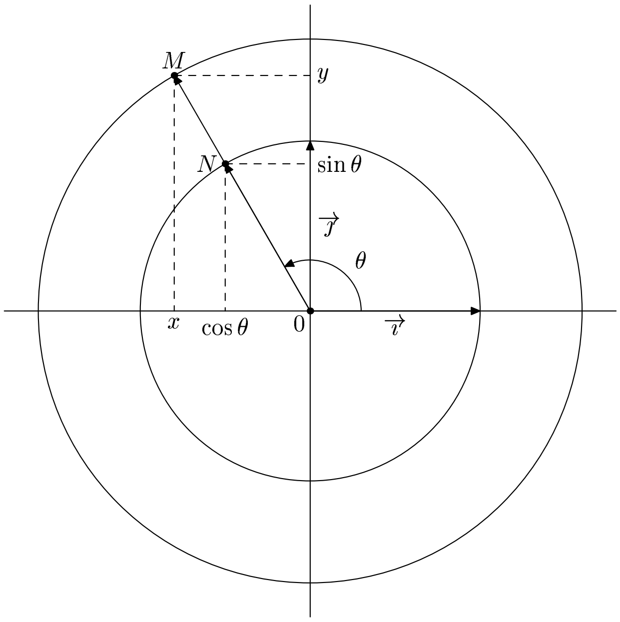
4.2 Lien entre coordonnées cartésiennes et polaires

Théorème 3. *Dans un repère orthonormal direct* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, un point* M *a pour coordonnées cartésiennes* $(x;y)$ *et pour coordonnées polaires* $[r;\theta]$*. Alors :*

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ ; \qquad x = r\cos\theta \ ; \qquad y = r\sin\theta$$

Preuve.

Notons $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathcal{C}$ en N. Il est alors clair que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
Comme les coordonnées cartésiennes de N sont $(\cos\theta;\sin\theta)$ alors celles de M sont $(r\cos\theta; r\sin\theta)$. Par unicité des coordonnées, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
De plus $OM^2 = x^2 + y^2$ et $OM = r$ donc $r^2 = x^2 + y^2$.



□