Géométrie dans l'espace

Références au programme

Programme officiel

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Géométrie dans l'espace		
Sphère	Savoir que la section d'une sphère par un plan est un cercle. Savoir placer le centre de ce cercle et calculer son rayon connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère Représenter une sphère et certains de ses grands cercles.	On mettra en évidence les grands cercles de la sphère, les couples de points diamétralement opposés. On examinera le cas particulier où le plan est tangent à la sphère. On fera le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour les questions relatives aux méridiens et aux parallèles.
Problèmes de sections planes de solides	Connaître la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête. Connaître la nature des sections de cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe. Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.	Des manipulations préalables (sections de solides en polystyrène par exemple) permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes étudiées. Ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autre rubriques ou au cours des années antérieures. À propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.

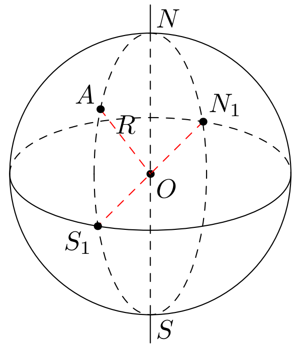
Textes d'accompagnement

En géométrie dans l'espace, on travaille, comme les années antérieures, sur des solides et on exploite les images mentales des situations de parallélisme et d'orthogonalité extraites du parallélépipède rectangle, images qui se construisent depuis la classe de 6$^{\text{ème}}$. Le travail proposé sur la sphère et sur les sections planes de solides déjà rencontrés consiste à extraire de ces situations spatiales des figures planes, à les représenter dans leur plan à l'échelle, à effectuer des calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes. En 3$^{\text{ème}}$, d'une part ce travail s'appuie sur diverses perceptions des solides étudiés, permet éventuellement de les renforcer, voire de les construire : ainsi selon que l'on coupe un cylindre par un plan parallèle à l'axe ou par un plan perpendiculaire à l'axe, on peut le percevoir comme engendré par la translation d'un cercle ou par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. D'autre part, en exploitant le fait qu'une perpendiculaire à un plan en un point est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point, on démontre, avec le théorème de Pythagore, que les sections planes d'une sphère sont des cercles. De même, on démontre, en utilisant de plus la propriété de Thalès, que la section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction de cette base.

I Sphère et boule. section d'une sphère par un plan

Définitions : O est un point de l'espace et R est un nombre positif donné.
- La **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O égale à R.
- La **boule** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à R.
- Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.

- la sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = R$.
- la boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq R$.
- Le cercle de centre O et de rayon OA est un grand cercle ($OA = R$).



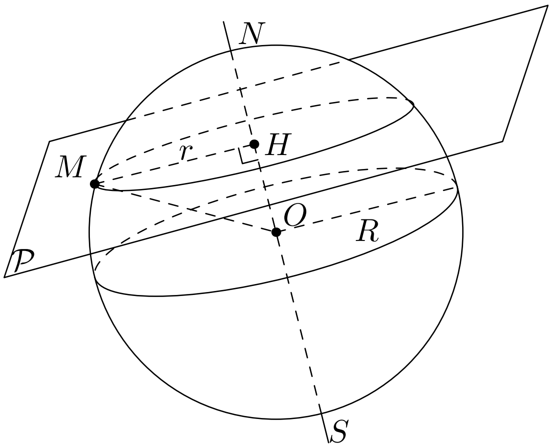
Propriétés : R est un nombre positif donné.
- L'**aire** d'une sphère de rayon R est égale à $\mathbf{4\pi R^2}$.
- Le **volume** d'une boule de rayon R est égal à $\mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Exemples :
- L'aire d'une sphère de rayon 7 cm est égale, en cm^2, à : $4 \times \pi \times 7^2 = 196\pi$.
- le volume de la boule de même rayon 7 cm est égal, en cm^3, à :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3 = \frac{1372}{3} \times \pi.$$

Propriété : La section d'une sphère par un plan est un **cercle**.

Plus précisément, considérons une sphère de centre O et de rayon R. $\mathcal{P}$ est un plan perpendiculaire en H à l'un de ses diamètres. On dit que OH est la distance du centre O au plan $\mathcal{P}$. Selon la valeur de OH, on a :
- lorsque $0 < OH < R$, la section de la sphère de centre O et de rayon R par le plan $\mathcal{P}$ est le cercle de centre H. Pour tout point M de ce cercle, le triangle HOM est rectangle en H. Calculons le rayon r de ce cercle de section : appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle HOM rectangle en H) : $OM^2 = HO^2 + HM^2$ soit $R^2 = HO^2 + r^2$ donc $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$;
- lorsque $OH = 0$, le cercle de section a même centre O et même rayon que la sphère : c'est alors un **grand cercle** de la sphère, il partage la sphère en deux **hémisphères** ;
- lorsque $OH = R$, le cercle de section a pour centre S (ou N) et pour rayon 0. On dit que le **plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère en S (ou en N)**.
- lorsque $OH > R$, le plan $\mathcal{P}$ ne coupe pas la sphère.

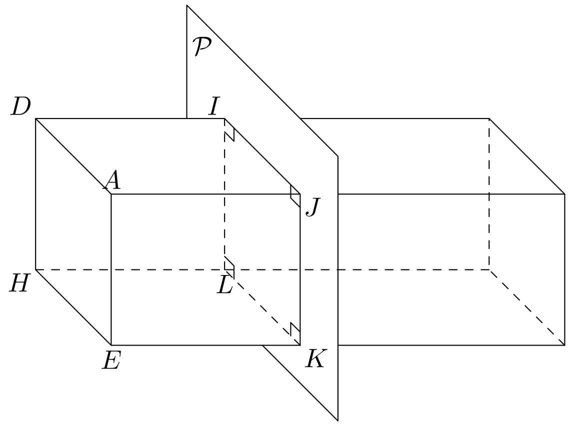


Exemple : Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon $R = 5$ cm coupée par un plan $\mathcal{P}$ tel que $OH = 3$ cm. La section obtenue est le cercle de centre H et de rayon $r = 4$ cm, car $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16}$ $= 4$

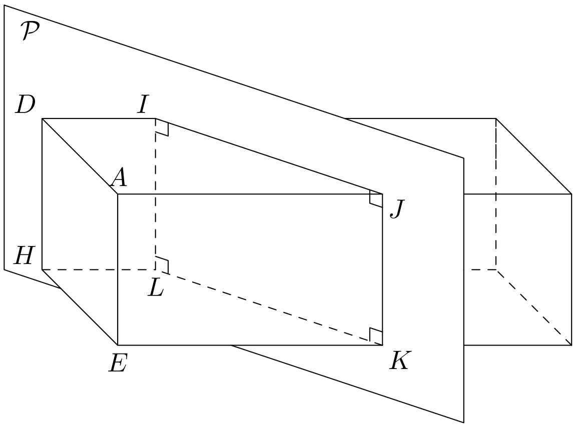
II Sections de cubes, de parallélépipèdes rectangles et de cylindres de révolution

II.1 Cubes et parallélépipèdes rectangles (ou pavés droits)

Propriété :	La section d'un cube ou d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou à une arête est un rectangle.



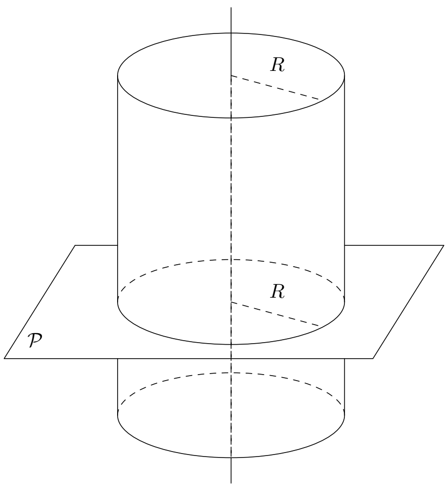
$\mathcal{P}$ est parallèle à la face $ADHE$.



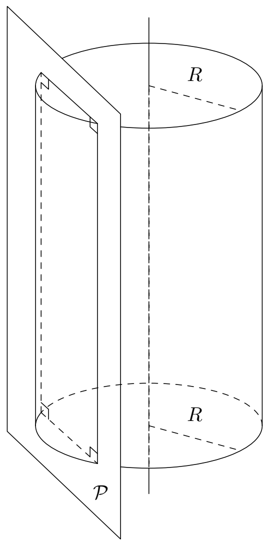
$\mathcal{P}$ est parallèle à l'arête $[AE]$.

II.2 Cylindre de révolution

Propriétés :	La section d'un cylindre de rayon R par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle de rayon R et dont le centre appartient à cet axe. La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe est un rectangle.



$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution.



$\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe de révolution.

Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :

$$\mathcal{V} = \pi \times R^2 \times h$$

Surface d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :

$$\mathcal{S} = 2\pi \times R \times h$$

III Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Définitions :

- L' **agrandissement de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k supérieur à 1.
- La **réduction de rapport** k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre k inférieur à 1.

Exemples :

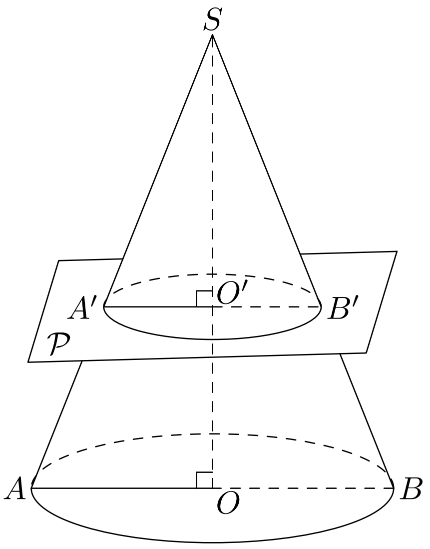
– une maquette réalisée à l'échelle $\frac{1}{100}$ est la réduction de rapport $\frac{1}{100}$ de l'objet réel.
– une feuille de format A3 (rectangle de dimensions 29,7 cm et 42 cm) est un agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ d'une feuille de format A4 (rectangle de dimensions 21 cm et 29,7 cm).

Propriétés : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k,
les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

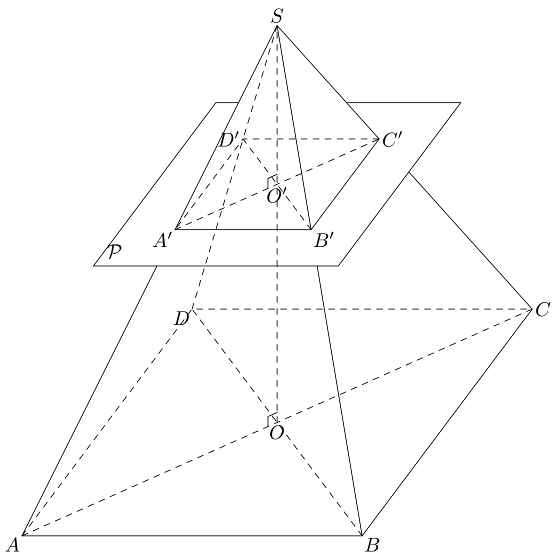
Exemples :

– Deux feuilles de format A4 sont nécessaires pour recouvrir exactement une feuille de format A3 ($k = \sqrt{2}$ et $k^2 = 2$ soit le double de la surface).
– huit petits cubes d'arêtes a sont nécessaires pour remplir un cube d'arête $2a$ ($k = 2$ et $k^3 = 8$).

Propriété : La section d'une pyramide (ou d'un cône de révoultion) par un plan parallèle à la base est une réduction de la base de la pyramide (ou du cône).
La "petite pyramide" et le "petit cône" obtenus sont des réductions de la pyramide et du cône sectionnés. Le rapport de réduction k est égal au quotient d'une longueur de la petite pyramide ou du petit cône par la longueur correspondante de la pyramide ou du cône de départ.



$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \dots$$



$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \dots$$

Volume d'un cône dont le disque de base a pour rayon R et de hauteur h :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$$

Volume d'une pyramide d'aire de base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$