Références au programme

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Nombres entiers et rationnels Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. Depuis la classe de $5^{\text{ème}}$, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont elles-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui donnant le PGCD de deux entiers permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra eventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

Les élèves ont déjà eu l'occasion de simplifier des écritures fractionnaires, mais sans disposer de critères pour déterminer si la fraction obtenue est irréductible ou non. Les problèmes proposés à ce sujet en $3^{\text{ème}}$ sont l'occasion d'enrichir les connaissances des élèves en arithmétique. Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs, il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l'obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement un algorithme de différence - la répétition de la transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à (285, 630) fait correspondre (285, 345) - plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers. Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers. Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions.

La synthèse sur les nombres rencontrés au collège permet par ailleurs de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels, en mettant en évidence le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels. Le nombre π en est bien sûr un exemple, mais ce sont surtout les nombres qui ne peuvent pas être exprimés exactement autrement qu'en utilisant le symbole $\sqrt{\ }$ (lettre r stylisée) qui en sont la meilleure illustration. Il est donc intéressant de faire prendre conscience aux élèves de toute la richesse, tant théorique que pratique, à laquelle peut conduire une réflexion sur un objet tel que $\sqrt{2}$: longueur de la diagonale du carré unité ou côté du carré d'aire double. L'utilisation d'un symbole particulier (presque un nom propre) laisse à penser que les écritures antérieures ne suffisaient pas. Sa découverte constitue un des premiers succès historiques des mathématiques. Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ pourra, dans cette optique, éventuellement être envisagée. Le théorème de Pythagore, vu en classe de $4^{\text{ème}}$, est pour le concept de racine carrée une bonne opportunité de mettre en oeuvre le principe d'appuis mutuels entre différentes parties du programme.

1 Relation de divisibilité

1.1 Diviseurs d'un entier

On considère deux nombres entiers a et b avec $b \neq 0$.
Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit que a est divisible par b et que b est un **diviseur** de a.
b est un diviseur de a signifie aussi que a est dans la table de multiplication de b (autrement dit a est un multiple de b).
Exemple :
- 2 est un diviseur de 18 car 18 est dans la table de 2 : $18 = 2 \times 9$.
- 5 n'est pas un diviseur de 48 car 48 n'est pas dans la table de 5 : $5 \times 9 = 45$ et $5 \times 10 = 50$.

Avec les petits nombres, en utilisant les tables de multiplications, il est facile de dire si un nombre est un diviseur d'un autre nombre mais avec les grands nombres, en l'absence de calculatrice, on est obligés de poser la division :

13 est-il un diviseur de 8021 ?

8	0	2	1	1	3	
7	8			6	1	7
	2	2				
		9	1			
		9	1			
			0			

Le reste de la division euclidienne est nul donc 13 est un diviseur de 8021.
Tous les nombres entiers admettent au moins deux diviseurs évidents : 1 et le nombre lui-même. (car $1 \times a = a \times 1 =$ a)
Il est donc possible de dresser la liste des diviseurs de n'importe quel nombre entier.
En général on procède ainsi :
Par exemple dressons la liste des diviseurs de 18 : 1 et 18 sont deux diviseurs evidents ; ensuite on regarde les nombres entiers dans l'ordre croissant : 2 est un diviseur de 18 car $2 \times 9 = 18$ ce qui signifie que 9 en est un aussi ; 3 aussi car $3 \times 6 = 18$, donc 6 en est un aussi ; 4 ne divise pas 18, 5 non plus, et on retrouve 6 que l'on a déjà relevé. Ainsi, la liste des diviseurs de 18 est $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

1.2 Diviseurs communs à deux entiers

Définition : Si deux entiers a et b sont divisibles par un même nombre entier k, on dit que k est un **diviseur commun** à a et b

Exemples :
- $36 = 12\times 3$ et $24 = 12 \times 2$ donc 12 est un dviseur commun à 36 et 24 ;
- $36 = 8 \times 4{,}5$ et $24 = 8 \times 3$ donc 8 n'est pas un diviseur commun à 36 et 24 car ce n'est pas un diviseur de 36

Remarque : 1 est toujours diviseur commun à deux entiers a et b donc la liste des diviseurs communs à deux entiers existe toujours.
En général, on procède ainsi : on dresse la liste de chaque entier et on regarde les nombres qui apparaissent dans les deux listes.
Par exemple dressons la liste des diviseurs communs de 18 et 30 :
- liste des diviseurs de 18 : {**1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18} ;
- liste des diviseurs de 30 : {**1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15, 30}

On en déduit la liste des diviseurs communs à 18 et 30 : $\{1, 2, 3, 6\}$. Ainsi, dans une liste de diviseurs communs à deux entiers, il existe toujours un plus grand nombre, d'où la définition :

Propriété : Parmi les diviseurs communs à a et b, l'un deux est plus grand que les autres.
Définition On l'appelle le **P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur (en abrégé **PGCD**) ; on le note PGCD(a ; b).

Exemple : 6 est le PGCD de 18 et 30 : PGCD(18 ; 30) = 6.

1.3 Entiers premiers entre eux

Définition : Si deux entiers ont pour seul diviseur commun 1 (i.e PGCD(a ; b) = 1), on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Exemple : 12 et 35 on pour seul diviseur commun 1 : en effet
- liste des diviseurs de 12 : {**1**, 2, 3, 4, 6, 12} ;
- liste des diviseurs de 35 : {**1**, 5, 7, 35}

donc 12 et 35 sont premiers entre eux.
En revanche, 42 = 7×6 et 35 = 7×5 donc 42 et 35 sont divisibles par 7 donc 42 et 35 ne sont pas premiers entre eux.

1.4 Propriétés des diviseurs communs

Propriété : Si k est un diviseur commun aux entiers a et b avec $a > b$, alors k est aussi un diviseur de $a + b$ et $a - b$.

Démonstration : Si k est un diviseur commun à a et b, alors $a = k \times a'$ et $b = k \times b'$ avec a' et b' entiers, donc $a + b = k \times a' + k \times b' = k \times (a' + b')$ donc k divise $a + b$.
De même $a - b = k \times a' + k \times b' = k \times (a' - b')$ donc k divise $a - b$.

2 Calcul du PGCD de deux nombres à l'aide d'algorithmes

2.1 Algorithme des différences successives

D'après la propriété précédente, on peut trouver le moyen de calculer rapidement un PGCD sans avoir à dresser la lise des diviseurs communs aux deux entiers : le PGCD de deux nombres est le même que le PGCD du plus petit et de la différence des deux.

Exemple : calculons le PGCD de 578 et 170

		Différences
578	170	408
408	170	238
238	170	68
170	68	102
102	68	34
68	34	34
34	34	0

Par différences successives, on diminue les deux nombres, jusqu'à ce que la différence fasse 0 ; à cette étape on a PGCD(578 ; 170) = PGCD(170 ; 238) = ... = PGCD(34 ; 34) = 34 donc **le PGCD est la dernière différence non nulle dans les différences successives**.

2.2 Algorithme d'Euclide

Propriété : Soient a et b deux nombres entiers avec $a > b$ et $b \neq 0$.
Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r).

Démonstration : Il suffit de montrer que si k est un diviseur commun à a et b, alors k est encore un diviseur commun à b et r :
r est le reste de la division euclidienne de a par b signifie qu'il existe un nombre entier q tel que $a = b \times q + r$;
Si k est un diviseur commun à a et b, alors $a = k \times a'$ et $b = k \times b'$ avec a' et b' entiers donc l'égalité précédente devient $k \times a' = k \times b' \times q + r$ donc $r = k \times a' - k \times b' \times q = k \times (a' - b' \times q)$ donc k est un diviseur de r donc c'est un diviseur commun à b et r.
remarque : Pour être totalement rigoureux, il aurait fallu montrer aussi que si k est un diviseur commun à b et r alors c'est un diviseur commun à a et b ce qui se montre très facilement avec la relation $a = b \times q + r$.

Application : calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide
En utilisant la propriété précédente, on peut trouver le PGCD de deux nombres, par exemple 3150 et 1246 :

		Restes	
3150	1246	658	$3150 = 1246 \times 2 + 658$
1246	658	588	$1246 = 658 \times 1 + 588$
658	588	70	$658 = 588 \times 1 + 70$
588	70	28	$588 = 70 \times 8 + 28$
70	28	14	$70 = 28 \times 2 + 14$
28	14	0	$28 = 14 \times 2 + 0$

Par divisions successives du diviseur par le reste, on diminue les deux nombres jusqu'à ce que le reste fasse 0 ; à cette étape on a PGCD(3150 ; 1246) = PGCD(1246 ; 658) = ... = PGCD(28,14) = 14 donc **le PGCD est le dernier reste non nul dans les divisions successives**.

3 Fractions irréductibles

Définition : Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, on dit que cette fraction est **irréductible**.

Cela signifie que l'on ne peut plus la simplifier.
Exemple : 12 et 7 sont premiers entre eux donc $\frac{12}{7}$ est une fraction irréductible.
On aura donc une fraction irréductible lorsqu'on aura simplifié la fraction par le plus grand diviseur commun au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire par le PGCD :

Propriété : En simplifiant la fraction $\frac{a}{b}$ par PGCD$(a\,;\,b)$, on obtient une fraction irréductible.

Application : Simplifier la fraction $\frac{5148}{1386}$ pour la rendre irréductible.
0n calcule le PGCD de 5148 et 1386 :

		Restes	
5148	1386	990	$5148 = 1386 \times 3 + 990$
1386	990	396	$1386 = 990 \times 1 + 396$
990	396	198	$990 = 396 \times 2 + 198$
396	198	0	$396 = 198 \times 2 + 0$

On a donc PGCD(5148 ; 1386) = 198 ; comme 5148 = 198×26 et 1386 = 198×7 on a donc :

$$\frac{5148}{1386} = \frac{26}{7}$$

4 Eléments culturels et historiques

EUCLIDE d'Alexandrie grec, vers -285

On ne possède pas d'informations précises sur la vie d'Euclide. Il semble qu'il étudia à Athènes à l'Ecole des successeurs de Platon et qu'il s'établit à Alexandrie sur l'invitation de Ptolémée II, roi d'Egypte.
Heureusement, ses Eléments, oeuvre monumentale en treize livres, nous sont parvenus et auront marqué toutes les générations de mathématiciens jusqu'à nos jours : synthèse des mathématiques connues à son époque auxquelles il apporte compléments, démonstrations et rigueur en arithmétique, algèbre et géométrie. Les quatre premiers volumes sont consacrés à la géométrie plane (livres I à IV).
Cette dernière est mise en place au moyen de cinq postulats (les demandes) et de neuf axiomes relatifs aux grandeurs ("notions communes" à l'usage de la géométrie et de l'arithmétique).

Il serait plus correct de dire en français PGDC plutôt que PGCD. Cela provient de l'abréviation anglo-saxonne GCD : Greatest Common Divisor... Idem pour le PPCM : de l'anglais LCM : Least Common Multiple.

Calcul d'un PGCD - méthode des différences

Cette méthode par différences est parfois appelée anthyphérésie (mot dérivé du grec anti dans le sens de devant et aphairesis = action d'enlever). Elle est due à Euclide, dans le livre septième de ses Eléments, proposition 2.