Système de deux équations à deux inconnues

Références au programme

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Système de deux équations à deux inconnues	Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.	Pour l'interprétation graphique, on utilisera la représentation des fonctions affines.

En $3^{\text{ème}}$, le champ des problèmes nécessitant la résolution d'une équation du premier degré se prolonge à ceux qui conduisent à :
- la résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques, après qu'a été dégagé le lien entre l'ordre et la multiplication,
- la résolution d'une équation mise sous la forme $A.B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré,
- la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Dans chaque cas, la géométrie, la gestion de données, les autres disciplines et la vie courante fournissent de nombreux exemples. On sera attentif à l'interprétation des résultats obtenus, en les replaçant dans le contexte envisagé.

L'étude systématique des différentes méthodes de résolution algébrique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues n'est pas un objectif du programme. L'idée à dégager est celle de se ramener à la résolution d'équations à une seule inconnue.

1 Un exemple de problème

Brevet 2002 - Académie de Créteil (groupe nord) :
Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30 € ; un canard et un poulet valent ensemble 20,70 €. Déterminer le prix d'un poulet et d'un canard.
On a deux nombres inconnus : le prix d'un canard et le prix d'un poulet. Si on n'a que la première phrase d'information, on ne peut résoudre le problème de manière satisfaisante. En effet, si un poulet vaut 9,50 € et un canard vaut 10,45 € alors $3 \times 9,50 + 4 \times 10,45 = 28,50 + 41,80 = 70,30$ et la première condition est vérifiée ; mais un poulet à 10,50 € et un canard à 9,70 € vérifient aussi la condition :
$3 \times 9,50 + 4 \times 10,45 = 28,50 + 41,80 = 70,30$. Il faut donc des informations supplémentaires pour pouvoir résoudre le problème de manière unique. C'est pourquoi la seconde phrase est donnée : deux conditions doivent suffire pour résoudre le problème de manière unique. Algébriquement, les deux prix recherchés peuvent être assimilés à deux inconnues et les deux conditions données dans l'énoncé étant deux égalités vérifiées par les prix inconnus, on obtient deux équations. Ainsi, dès que l'on a autant d'équations distinctes que d'inconnues, on peut résoudre le problème. L'idée est d'algébriser le problème : il faut donc faire un choix d'inconnues. De manière évidente, on peut désigner par x le prix d'un canard et par y le prix d'un poulet (en € bien entendu).
la première condition se traduit par $3 \times x + 4 \times y = 70,30$ soit $4x + 3y = 70,30$.
La deuxième condition se traduit par $x + y = 20,70$.
Il faudra donc résoudre de manière simultanée : $\begin{cases} 3x + 4y = 70,30 \\ x + y = 20,70 \end{cases}$ Cet ensemble de deux équations à deux inconnues, indissociables l'une de l'autre, est appelé **système de deux équations à deux inconnues**.

2 Couple solution d'un système de deux équations à deux inconnues

Exemple : $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

Définition : **Résoudre un système de deux équations à deux inconnues**, c'est trouver toutes les valeurs des inconnues qui vérifient les deux équations à la fois. Un couple de nombres solution des deux équations à la fois, c'est-à-dire qui rend vraies les deux égalités à la fois, est appelé **solution** ou **couple solution du système**.

Remarque importante : en classe de troisième, les systèmes que l'on étudie ont **une solution unique**. Résoudre un système consiste donc toujours à trouver **un seul** couple solution.

Exemple : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. Le couple (1 ; 2) est la solution du système car les égalités $2 \times 1 + 2 = 4$ et $1 + 2 = 3$ sont vraies toutes les deux.

3 Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

On ne sait résoudre que les équations à une inconnue. Le but du jeu sera donc de se ramener à la résolution d'équations à une inconnue. On va donc chercher à éliminer une inconnue dans une des équations en s'aidant de l'autre équation afin d'obtenir un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Pour cela, on peut utiliser une des deux méthodes algébriques exposées ici.

3.1 Méthode d'élimination par substitution (ou par remplacement)

Par définition, la substitution est l'action de remplacer, de mettre l'un à la place de l'autre.

Résoudre le système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$	**Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution, c'est :**
① Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'exprimer x en fonction de y dans cette équation : $x = -3y + 10$	❶ Exprimer, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Parmi les quatre possibilités, on choisit celle qui rend les calculs plus simples
② On remplace x par $-3y + 10$ dans la seconde équation. On écrit le nouveau système : $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ 3(-3y + 10) + 5y = 18 \end{cases}$	❷ Réécrire le système en remplaçant dans l'autre équation l'inconnue choisie, par l'expression obtenue à l'étape ❶. On obtient ainsi un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
③ On résoud la seconde équation à une inconnue y : $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ -4y + 30 = 18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -3y + 10 \\ y = 3 \end{cases}$	❸ Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
④ On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} x = -3 \times 3 + 10 \\ y = 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$	❹ Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape ❸, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.
⑤La solution du système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ est le couple (1 ; 3).	❺ Conclure après avoir vérifié : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

3.2 Méthode d'élimination par combinaison

La combinaison est l'action de grouper, d'unir plusieurs objets pour en former un nouveau.

Résoudre le système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$	**Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par combinaison, c'est :**
① Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d' éliminer x, on multiplie par -3 les deux membres de la première équation : $-3x - 9y = -30$	❶ Choisir l'inconnue que l'on veut éliminer. Multiplier les deux membres de chacune des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés dans chacune des deux équations.

② On additionne membre à membre les deux équations du système $\begin{array}{l} \begin{cases} -3x - 9y = -30 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases} \\ \hline \qquad -4y = -12 \end{array}$ On obtient l'équation : $-4y = -12$ et on écrit le nouveau système : $\begin{cases} -4y = -12 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$	❷ Ecrire le système dont les deux équations ont des coefficients opposés pour l'inconnue à éliminer et additionner membre à membre les deux équations de ce système. Ecrire un nouveau système, avec cette équation et l'une des deux équations de départ. On obtient ainsi un système dont l'une des deux équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
③ 0n résoud la première équation à une inconnue y : $\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$	❸ Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
④ On reporte la valeur de y dans la seconde équation pour calculer x : $\begin{cases} y = \qquad 3 \\ 3x + 5 \times 3 = 18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$	❹ Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape ❸, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue
⑤La solution du système : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ est le couple $(1\,;\,3)$.	❺ Conclure après avoir vérifié : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

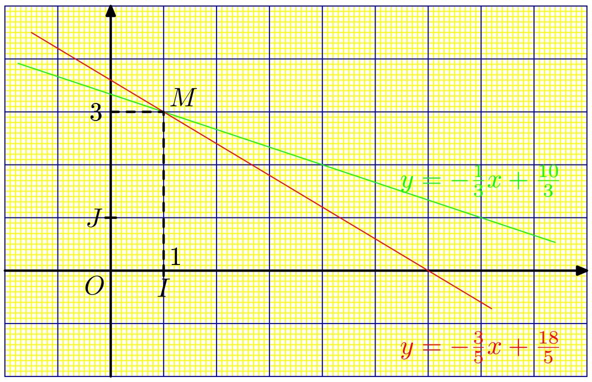
4 Interprétation graphique

On reprend le système précédent : $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$ et on exprime dans chaque équation y en fonction de x : $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5} \end{cases}$ On obtient ainsi un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ ; cette présentation de la forme $y =$ *"quelque chose"* fait penser à des équations de droites donc à des représentations graphiques de fonctions affines.

On considère les deux fonctions affines $f_1 : x \longmapsto -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ et $f_2 : x \longmapsto -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$. On trace leurs représentations graphiques dans un repère en déterminant les coordonnées de deux points :

- pour f_1 : l'ordonnée à l'origine est $(0\,;\,\frac{10}{3})$ et on calcule l'image de 7 : $f_1(7) = -\frac{1}{3} \times 7 + \frac{10}{3} = \frac{-7}{3} + \frac{10}{3} = 1$ donc un deuxième point est $(7\,;\,1)$;
- pour f_2 : l'ordonnée à l'origine est $(0\,;\,\frac{18}{5})$ et on calcule l'image de 6 : $f_2(6) = -\frac{3}{5} \times 6 + \frac{18}{5} = \frac{-18}{5} + \frac{18}{5} = 0$ donc un deuxième point est $(6\,;\,0)$;

On obtient donc le graphique suivant :



Le point M est **à la fois** sur les deux droites donc ses coordonnées $(x\,;\,y) = (1\,;\,3)$ vérifient **à la fois** les deux équations. Le couple des **coordonnées du point d'intersection** des deux droites est la solution du système. **On peut donc résoudre graphiquement un système de deux équations en traçant les représentations graphiques des deux fonctions affines associées et en lisant les coordonnées du point d'intersection : l'abscisse correspond à la solution pour l'inconnue x et l'ordonnée correspond à la solution pour l'inconnue y.**