Références au programme

Programme officiel

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.	Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, N un point du côté $[AC]$ et si $[MN]$ est parallèle à $[BC]$, alors $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$	L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. Elle s'étend bien sûr au cas où M et N appartiennent respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, mais on n'examinera pas le cas où les demi-droites $[AM)$ et $[AB)$, de même que les demi-droites $[AN)$ et $[AC)$, sont opposées. Le théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque seront étudiés en classe de $3^{\text{ème}}$.

Textes d'accompagnement

La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. Sa bonne appréhension par les élèves est fondamentale, son apprentissage ne peut être que progressif. L'étude de situations familières permet de développer chez les élèves un «mode de pensée proportionnel». C'est en classe de $3^{\text{ème}}$ que les fonctions linéaires sont introduites pour modéliser les situations de proportionnalité.

Dans le cycle central, particulièrement en classe de $4^{\text{ème}}$, la proportionnalité constitue un fil directeur commun à la plupart des rubriques du programme, en géométrie, en organisation des données, en calcul numérique.

Plus précisément, on apprend aux élèves à reconnaître et à traiter des situations de proportionnalité.

Ainsi, en classe de $5^{\text{ème}}$, on met en évidence et on détermine un coefficient de proportionnalité, par exemple dans un tableau de nombres, dans des changements d'unités ou pour la reconnaissance d'un mouvement uniforme. Les situations de la vie courante sont privilégiées.

Les exemples suggérés dans la rubrique «organisation et gestion des données» permettent aussi de mettre en évidence des contre-exemples de situations de proportionnalité.

En classe de $4^{\text{ème}}$, de tels coefficients sont appliqués dans l'étude de certains problèmes : propriété de Thalès en géométrie, utilisation de pourcentages, calculs sur les fractions dans le domaine numérique ; en effet, celles-ci constituent un instrument d'écriture bien adapté à l'expression de la proportionnalité. On introduit les unités-quotients à propos de la vitesse. Les élèves ont pu être amenés à faire usage des km.h^{-1} dès la classe de $5^{\text{ème}}$, mais les problèmes proposés à ce niveau ne mobilisaient que la relation entre l'espace parcouru et la durée dans un mouvement uniforme.

Dans la situation de Thalès pour le triangle, tous les résultats de proportionnalité utiles sont présentés à partir de la situation obtenue en faisant couper deux sécantes par deux parallèles ; le point d'appui pris sur la situation d'un triangle avec les milieux de ses côtés, en autorisant une justification partielle, en facilite l'introduction. De tels résultats permettent de définir le cosinus d'un angle aigu.

1 Notion de proportionnalité (rappels des années précédentes)

1.1 Tableau de proportionnalité

Au marché du Galion, le kilo de tomates est vendu 2 €le kilo. Si j'en achète 3 kilos, je paie $3 \times 2 = 6$ €. Si j'en achète le double, je paie le double ; si j'en achète la moitié moins, je paie la moitié moins.
Ainsi, le prix varie dans les mêmes proportions que le poids acheté. On dit que le prix est **proportionnel** au poids.
Si l'on rentre quelques exemples de poids et de prix correspondants dans un tableau de valeurs :

Poids en kilo	3	6	4,5	8
Prix en €	6	12	9	16

On remarque que l'on passe des nombres de la première ligne aux nombres correspondants dans la deuxième ligne en les multipliant par 2.

Définition : On dit que deux grandeurs (dont les valeurs sont ordonnées en ligne dans un tableau) sont proportionnelles si les termes d'une ligne s'obtiennent en multipliant tous ceux de l'autre ligne par un même nombre.
Ce nombre s'appelle **le coefficient de proportionnalité** et un tel tableau est appelé **tableau de proportionnalité**.

Exemples : le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre car on a la formule $périmètre = \pi \times rayon$; on obtient toujours le périmètre d'un cercle en multipliant son diamètre par π.

1.2 Caractérisations : comment reconnaître une situation de proportionnalité ?

Règle d'égalité des quotients : Il y a proportionnalité dans un tableau lorsque tous les couples de termes qui se correspondent donnent le même quotient.

Exemples :

2	-5	14
-3	7,5	-21

$$\frac{-3}{2} = \frac{7,5}{-5} = \frac{-21}{14} = -1,5$$

Tous les quotients sont égaux, il y a donc proportionnalité.

12	15	35
7,2	9	28

$$\frac{7,2}{9} = \frac{9}{15} = 0,6$$

mais $\frac{28}{35} = 0,8$. Tous les quotients ne sont pas égaux, il n'y a donc pas proportionnalité.

Règle d'égalité des produits en croix : Il y a proportionnalité dans un tableau lorsque tous les couples de termes qui se correspondent donnent le même quotient.

Exemples :

2	6
5	14

$$2 \times 14 \neq 6 \times 5$$

Il n'y a pas proportionnalité.

2	5
6	15

$$2 \times 15 = 6 \times 5$$

Il y a proportionnalité.

1.3 Calculer une quatrième proportionnelle : règle de trois

x	6
8	25

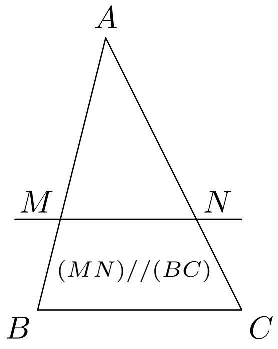
On considère un tableau de proportionnalité et l'on souhaite déterminer la valeur de x.

On écrit que les produits en croix sont égaux $x \times 25 = 8 \times 6$ soit $25x = 48$ donc $x = \frac{6\times 8}{25} = \frac{48}{25} = 1,92$.

Remarque : ce calcul est valable en cas de quotients égaux : si x est tel que $\frac{11}{x} = \frac{14}{25}$ alors $x \times 14 = 11 \times 25$ donc $x = \frac{11\times 25}{14} = 3,96$.

2 Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes

ABC et AMN sont deux triangles formés par deux parallèles (MN) et (BC) qui coupent deux sécantes (AB) et (AC).
Dans ce cas, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :



Longueurs des côtés de AMN	AM	AN	MN
Longueurs des côtés correspondants de ABC	AB	AC	BC

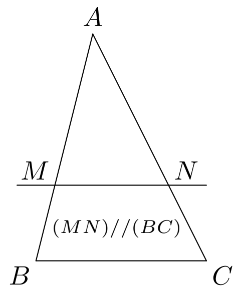
Propriété de Thalès : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, N est un point du côté $[AC]$, et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les longueurs des côtés de AMN sont proportionnelles aux longueurs des cotés correspondants de ABC.

remarque : les côtés correspondants sont portés par une même droite ou par des parallèles.

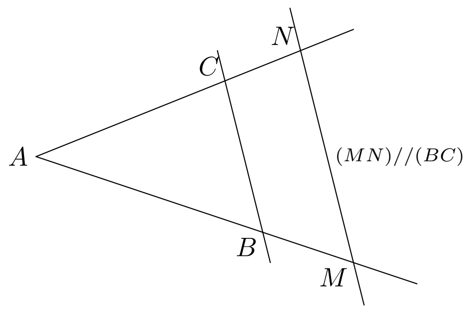
3 Égalité de trois rapports

Propriété : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, N un point du côté $[AC]$ et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

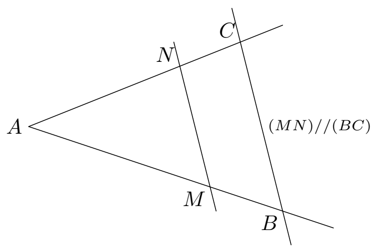


remarque : cette propriété est encore valable dans le cas où les points M et N sont respectivement situés sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, avec $(MN)//(BC)$.



application :
le théorème de Thalès sert à calculer des longueurs : dans une situation de Thalès, grâce à la proportionnalité des longueurs ou à l'égalité des rapports, on peut calculer une longueur connaissant les trois autres, il faut alors utiliser le produit en croix.

Exemple : on considère la situation de Thalès suivante où :
M est un point de $[AB]$, N est un point de $[AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On a de plus $AM = 2$ cm, $AN = 3$ cm et $AB = 8$ cm. On souhaite calculer AC. Le théorème de Thalès donne donc l'égalité des rapports :



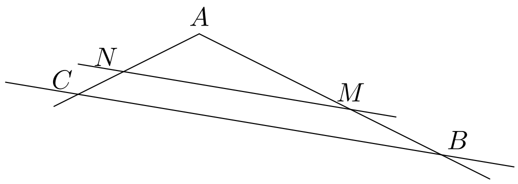
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

soit en remplaçant par les longueurs connues : $\frac{2}{8} = \frac{3}{AC} = \frac{MN}{BC}$

On ne s'intéresse qu'à la première égalité : les rapports sont égaux donc les produits en croix sont égaux : $\frac{2}{8} = \frac{3}{AC}$ donc $2 \times AC = 3 \times 8$ donc $AC = \frac{3 \times 8}{2}$ donc $AC = 12$.

4 Conséquence du théorème de Thalès dans le triangle

Le théorème de Thalès permet aussi de démontrer que deux droites en situation de Thalès ne sont pas parallèles.
exemple : Sur la figure ci-contre les points A, M, B sont alignés, ainsi que les points A, N, C. On sait que : $AM = 11,9$ cm ; $AB = 35$ cm ; $AN = 18,2$ cm ; $AC = 52$ cm.



Les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?
On calcule les rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{11{,}9}{35} = 0,34 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{18{,}2}{52} = 0,35$$

On les compare :
$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ (car $0,34 \neq 0,35$)
On applique la propriété de Thalès :
Si les droites (BC) et (MN) étaient parallèles, on aurait $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ce qui n'est pas le cas. On en déduit que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.