Table des matières

Références au programme

Objectifs de la partie «Nombres et calculs»

- acquérir différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants ;
- se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés ;
- poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;
- assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).

Cette partie du programme s'appuie naturellement sur la résolution de problèmes. Outre leur intérêt propre, ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations figurant au programme. Les problèmes proposés sont issus de la vie courante, des autres disciplines ou des mathématiques, cette dernière source de problèmes ne devant pas être négligée.

Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché sous ses différentes formes, souvent utilisées en interaction : calcul mental automatisé ou réfléchi, calcul posé ou instrumenté. A la suite de l'école primaire, le collège doit, en particulier, permettre aux élèves d'entretenir et de développer leurs compétences en calcul mental, ces compétences étant indispensables dans de nombreux domaines.

La notion de quotient occupe une place centrale en sixième, sous ses différentes significations : quotient euclidien, quotient décimal, quotient fractionnaire. Elle permet notamment d'élargir la portée des procédures utilisées à l'école élémentaire pour traiter des situations relevant de la proportionnalité.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Division, quotient Division euclidienne .	– Reconnaître les situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne et interpréter les résultats obtenus. – Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). – Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste). – Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 4, 5, 3 et 9.	L'attention des élèves doit être attirée sur la nécessité d'interpréter les deux résultats fournis (quotient et reste) dans le contexte du problème posé : quotient par défaut ou par excès, reste ou complément du reste au diviseur. Dans ce domaine également, le calcul mental (en particulier approché) constitue l'objectif prioritaire. La mise en place de techniques "expertes" est poursuivie, en se limitant à des diviseurs à un ou deux chiffres. La compréhension des étapes de la division posée en améliore la maîtrise. Dans cette optique, la pose des soustractions intermédiaires et de produits partiels ne doit pas être prohibée. Les élèves utilisent l'écriture de la relation $a = bq + r(r < b)$ pour contrôler le calcul, dans la continuité du travail entrepris à l'école primaire. La forme littérale de la relation est hors programme. La notion de multiple a été introduite à l'école primaire. Elle est rappelée, sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées. A l'école primaire, les élèves ont appris à reconnaître les multiples de 2 et 5.

Documents d'accompagnement

Articulation école-collège

En calcul posé (techniques opératoires), l'objectif essentiel réside dans la compréhension des techniques utilisées. À l'école primaire, les élèves ont appris à calculer des sommes et des différences de décimaux, des produits de deux entiers naturels ou d'un décimal par un entier, des quotients et restes dans le cas de la division euclidienne, avec possibilité de poser des soustractions intermédiaires et des produits partiels annexes pour déterminer un chiffre du quotient. Le produit de deux décimaux, comme le calcul d'un quotient décimal, ne figure pas au programme du cycle 3. Cet apprentissage relève de la classe de Sixième : technique de calcul et sens (reconnaissance des situations où interviennent le produit de deux décimaux ou un quotient décimal). Cependant, à l'école élémentaire, les élèves ont pu être confrontés à des problèmes du type :

- calcul de "l'aire du rectangle", par exemple en ayant recours à des changements d'unités ou à des procédures personnelles (voir paragraphe 1.1 du présent document) ;
- recherche du "prix de 3,5 kg de fromage à 12,60 € le kg" où ils peuvent utiliser des procédures personnelles, par exemple liées à la proportionnalité, comme calculer le prix de 3 kg, puis celui de 500 g considéré comme la moitié d'un kg (ce qui est permis par les valeurs numériques choisies) ;
- recherche de la valeur obtenue en partageant équitablement 50 € entre 8 personnes : après avoir donné 6 € à chacun, le reste peut être converti en centimes pour poursuivre le partage.

Pour plus de précision on peut se reporter au document d'application pour le cycle 3 (pages 21 à 24).

1 Division euclidienne

1.1 Principe

Effectuer une division euclidienne revient à partager un nombre entier d'objets, en parts égales (ie contenant toutes le même nombre entier d'objets) : on dit qu'on fait un **partage équitable**.

Problème : On répartit 850 bonbons dans des sachets contenant chacun 35 bonbons. Combien e sachets remplit-on ?

- une première méthode consiste à chercher un multiple de 35 qui s'approche le plus possible de 850 :

  $1\times35 = 35\,;\quad 2\times35 = 70\,;\quad 3\times35 = 105\,;\quad \ldots 10\times35 = 350\,;\quad 20\times35 = 700\,;\quad 30\times35 = 1050\,;\quad 25\times3$

  On remplit donc 24 sachets de 35 bonbons et il en reste 10.
- une deuxième méthode plus rapide, plus automatique et qui nécessite moins de calculs : on effectue la division euclidienne de 850 par 35 :

$$\begin{array}{rrrr|rr} & 8 & 5 & 0 & 3 & 5 \\ \cline{5-6} - & 7 & 0 & & 2 & 4 \\ \cline{1-3} & 1 & 5 & 0 & & \\ - & 1 & 4 & 0 & & \\ \cline{2-4} & & 1 & 0 & & \end{array}$$

Définition : Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers, c'est trouver deux nombres entiers, le quotient et le reste qui doivent vérifier :

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste} \qquad \text{avec} \qquad \text{reste} < \text{diviseur}.$$

$$\begin{array}{lrrrr|rrl} \text{dividende} \rightarrow & & 8 & 5 & 0 & 3 & 5 & \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{6-7} & - & 7 & 0 & & 2 & 4 & \leftarrow \text{quotient} \\ \cline{2-4} & & 1 & 5 & 0 & & & \\ & - & 1 & 4 & 0 & & & \\ \cline{3-5} \text{reste} \rightarrow & & & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Exemples :

- on cherche un nombre de parts :

  Un fleuriste a 238 brins de muguet et veut faire des bouquets ayant chacun 6 brins. Combien pourra-t-il faire de bouquets ?

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & 2 & 3 & 8 & 6 & \\ \cline{5-6}
- & 1 & 8 & & 3 & 9 \longleftarrow \text{quotient : nombre de parts} \\ \cline{1-3}
 & 0 & 5 & 8 & & \\
 & - & 5 & 4 & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 4 & &
\end{array}$$

  Il pourra faire 39 bouquets et il lui restera 4 brins

- on cherche la valeur d'une part :

  Amélie veut partager équitablement 132 bonbons entre 5 personnes. Combien chacun aura-t-il de bonbons ?

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & 1 & 3 & 2 & 5 & \\ \cline{5-6}
- & 1 & 0 & & 2 & 6 \longleftarrow \text{quotient : valeur d'une part} \\ \cline{1-3}
 & 0 & 3 & 2 & & \\
 & - & 3 & 0 & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & 2 & &
\end{array}$$

1.2 Technique

Exemple : on effectue la division euclidienne de 7 314 par 12 :

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & 7 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ \cline{6-7}
- & 7 & 2 & & & 6 & \\ \cline{1-3}
 & 0 & 1 & & & &
\end{array}$$

- 7 est plus petit que 12, donc on prend 73.
- En 73, combien de fois 12 ? $6 \times 12 = 72$, donc on écrit 6 au quotient il reste 73-72=1.

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & 7 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ \cline{6-7}
- & 7 & 2 & & & 6 & 0 \\ \cline{1-3}
 & 0 & 1 & 1 & & &
\end{array}$$

- On abaisse le 1.
- En 11, combien de fois 12 ? $12 \times 0 = 72$, donc on écrit 0 au quotient.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 7 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8}
- & 7 & 2 & & & 6 & 0 & 9 \\ \cline{1-3}
 & 0 & 1 & 1 & 4 & & & \\
 & - & 1 & 0 & 8 & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & 6 & & &
\end{array}$$

- On abaisse le 4.
- En 114, combien de fois 12 ? $12 \times 9 = 108$, donc on écrit 9 au quotient.Il reste 114-108=6.

On vérifie le résultat : $12 \times 609 + 6 = 7314$ avec $6 < 12$.

2 Diviseurs et multiples-divisibilité

2.1 Multiples et diviseurs

Définition : Si le reste de la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b est égale à 0, on dit que b est un **diviseur** de a ou a est divisible par b, a est un **multiple** de b. Dans ce cas, le nombre entier a est dans la table de multiplication de l'entier b.

Interprétation : les **multiples** d'un nombre sont tous les nombres de sa table de multiplication.

Exemples :

- dans les cas simples, on regarde dans la table de multiplication (petits nombres) : 63 est un multiple de 9 car $9 \times 7 = 63$: on peut aussi dire que 7 et 9 sont des diviseurs de 63.
- avec des nombres plus grands, on effectue des divisions euclidienne : si le reste est égal à 0, le dividende est un multiple du quotient, sinon, ce n'en est pas un. Par exmple, la division euclidienne de 84 par 7 donne un reste de 0 donc 84 est divisible par 7 ou 84 est un multiple. En revanche, la division euclidienne de 124 par 5 donne 4 donc 124 n'est pas divisible

2.2 Critères de divisibilité

Les entiers divisibles par 2, 4, 5 ou par 10

Ils sont reconnaissables à leur chiffre des unités ou leurs deux derniers chiffres

- Un entier est **divisible par 2** s'il est pair, c'est-à-dire s'il se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8 ;
- Un entier est **divisible par 4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 ;
- Un entier est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5 ;
- Un entier est **divisible par 10** s'il se termine par 0.

Exemples : 378 est divisible par 2, 7895 est divisible par 5, 728 est divisible par 4 alors que 814 ne l'est pas.

Les entiers divisibles par 3 ou par 9

Ils sont reconnaissables à la somme de tous leurs chiffres :

- les entiers **divisibles par 3** sont les nombres dont la somme de tous les chiffres est elle-même divisible par 3 ;
- les entiers **divisibles par 9** sont les nombres dont la somme de tous les chiffres est elle-même divisible par 9.

Exemples : 153 est divisible par 3 et par 9 car $1+5+3=9$ est divisible par 3 et 9. En revanche, 5637 est divisible par 3 mais pas par 9 : $5+6+3+7=21$ est divisible par 3 mais pas par 9.

Multiplications et divisions par 2, 3, ou 4

- Calculer le **double** c'est multiplier par 2. Calculer la **moitié** c'est diviser par 2.
- Calculer le **triple** c'est multiplier par 3. Calculer le **tiers** c'est diviser par 3.
- Calculer le **quadruple** c'est multiplier par 4. Calculer le **quart** c'est diviser par 4.

3 Division décimale

3.1 Définition

Définition : Effectuer la **division décimale**, d'un nombre décimal a par un nombre entier b différent de 0, c'est trouver le nombre manquant $\square$ dans l'égalité $a = b \times \square$. Ce nombre s'appelle le **quotient** de la division décimale de a par b et s'écrit $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

exemples :

- $9,2 = 2 \times 4,6$ signifie que 4,6 est le quotient de la division décimale de 9,2 par 2.
- $11 = 2,75 \times 4$: 2,75 est le quotient de la division décimale de 11 par 4.

remarque : la touche $\boxed{\div}$ de la calculatrice correspond à la division décimale.

3.2 Quotient décimal exact

Exemple : On paye 14 € les 8 tartelettes. Quel est le prix d'une tartelette ?

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & 4 & & 8 \\ \cline{5-5}
- & & 8 & & 1,\ 7\ 5 \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 0 & \\
 & - & 5 & 6 & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & 0 & \\
 & - & 4 & 0 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

- On cherche un prix donc une valeur décimale pour le quotient de la division de 14 par 8.
- On débute le calcul par la division euclidienne de 14 par 8 en vert ; on poursuit en écrivant le reste en nombre de dixièmes : 6 unités=60 dixièmes puis en le divisant par 8 ; on obtient 7 dixièmes au quotient (on place donc une virgule avant le chiffre 7)...
- La division tombe juste, elle se termine au chiffre 5 des centièmes, on obtient une **valeur exacte du quotient décimal** : le quotient de 14 par 8 **est égal à** 1,75, on peut écrire que $14 \div 8 = 1,75$

3.3 Quotient décimal approché

Exemple : Pour une activité en maternelle, on partage intégralement un rouleau de frise décorative de 95 cm de long en 11 morceaux identiques. La longueur d'un morceau est environ 8,6 cm.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 9 & 5 & & & 1\ 1 \\ \cline{6-6}
- & 8 & 8 & & & 8,\ 6\ 3\ 6 \\ \cline{2-3}
 & & 7 & 0 & & \\
 & - & 6 & 6 & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & 0 & & \\
 & - & 3 & 3 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 7 & 0 & \\
 & & & & \ldots &
\end{array}
$$

- la division ne tombe pas juste, le calcule ne s'arrête pas ; dans la partie décimale du quotient, apprès le chiffre 6, il y aura 3 puis à nouveau 6...
- On ne peut pas donner une valeur exacte du quotient mais on peut en donner une **valeur décimale approchée** : le quotient de 95 par 11 est **environ égal à** 8,6. On écrit $95 \div 11 \approx 8,6$.

3.4 Diviser un décimal par un entier

la tecnhique de division de 14,5 par 5 est la même que celle de la division de 145 par 5. Lorsqu'on abaisse le chiffre des dixièmes (ici 5), on place une virgule au quotient.

4 Rappels éventuels

4.1 Division par des décimaux particuliers

division par 10, 100 ou 1000

4.2 Valeur approchée d'un quotient

valeur approchée par défaut, par excès