

Programme de calcul et résolution d'équation

On appelle « *programme de calcul* » tout procédé mathématique qui permet de passer d'un nombre à un autre suivant une suite d'opérations déterminée.

Un programme de calcul permet alors de passer d'une liste de nombres à une liste de nombres fabriquée suivant le même procédé.

Exemple 1.

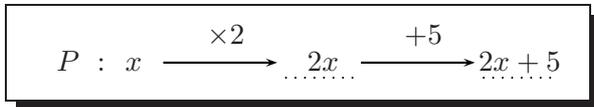
Le programme de calcul P est défini comme suit :

- choisir un nombre,
- prendre son double,
- ajouter cinq au résultat.

Voici un tableau permettant de donner les étapes intermédiaires dans différents calculs de P .

| Nombre de départ x | Double de x | Ajout de 5 | Valeur de P pour x |
|----------------------|---------------|---------------|------------------------|
| 1 | 2×1 | $2 + 5 = 7$ | $2 \times 1 + 5 = 7$ |
| 2 | 2×2 | $4 + 5 = 9$ | $2 \times 2 + 5 = 9$ |
| 4 | 2×4 | $8 + 5 = 13$ | $2 \times 4 + 5 = 13$ |
| 5 | 2×5 | $10 + 5 = 15$ | $2 \times 5 + 5 = 15$ |
| 7 | 2×7 | $14 + 5 = 19$ | $2 \times 7 + 5 = 19$ |
| 10 | 2×10 | $20 + 5 = 25$ | $2 \times 10 + 5 = 25$ |
| 12 | 2×12 | $24 + 5 = 29$ | $2 \times 12 + 5 = 29$ |
| 13 | 2×13 | $26 + 5 = 31$ | $2 \times 13 + 5 = 31$ |

On peut écrire un schéma pour écrire ce programme de calcul :



Le programme de calcul P se traduit par la formule mathématique :

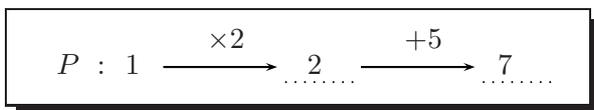
$$P = 2 \times x + 5$$

ou encore

$$P = 2x + 5$$

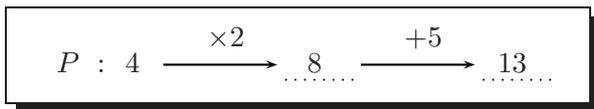
Et, pour les calculs de P pour des valeurs différentes de x , on écrit les schémas correspondants.

Pour $x = 1$.



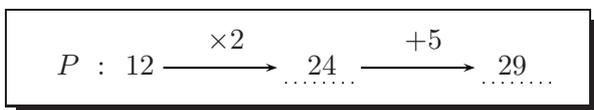
On a ainsi : $2 \times 1 + 5 = 7$.

Pour $x = 4$.



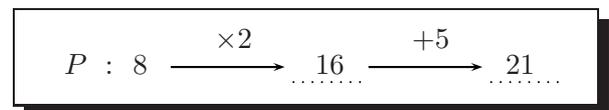
On a ainsi : $2 \times 4 + 5 = 13$.

Pour $x = 12$.



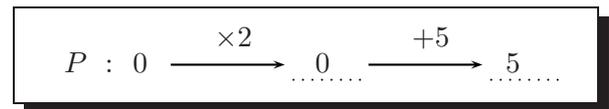
On a ainsi : $2 \times 12 + 5 = 29$.

Pour $x = 8$.



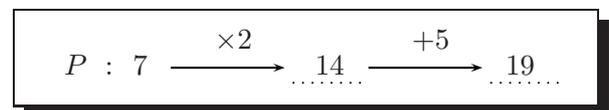
On a ainsi : $2 \times 8 + 5 = 21$.

Pour $x = 0$.



On a ainsi : $2 \times 0 + 5 = 5$.

Pour $x = 7$.



On a ainsi : $2 \times 7 + 5 = 19$.

Exercice 1. À partir des schémas suivants, donner une phrase permettant de trouver le programme de calcul associé, comme sur l'exemple suivant :

Exemple :

$$p : x \xrightarrow{\times 3} \dots 3x \dots \xrightarrow{+7} 3x + 7$$

Le programme de calcul p se traduit par :

- choisir un nombre,
- le multiplier par 3 (ou prendre son triple),
- puis ajouter 7 au résultat.

Voici les programmes de calcul à traduire.

$$p_1 : x \xrightarrow{\times 8} \dots 8x \dots \xrightarrow{+2} 8x + 2$$

$$p_3 : x \xrightarrow{\times 6} \dots 6x \dots \xrightarrow{+1} 6x + 1$$

$$p_2 : x \xrightarrow{\times 10} \dots 10x \dots \xrightarrow{-4} 10x - 4$$

$$p_4 : x \xrightarrow{\times 2} \dots 2x \dots \xrightarrow{-5} 2x - 5$$

Exercice 2. À partir des textes traduisant les programmes de calcul suivants, faire le schéma correspondant au programme de calcul associé, puis l'écrire de manière mathématique comme sur l'exemple suivant :

Exemple :

Le programme de calcul p est donné par :

- choisir un nombre,
- le multiplier par 5,
- puis retrancher 7 au résultat.

Le schéma associé au programme de calcul p est :

$$p : x \xrightarrow{\times 5} \dots 5x \dots \xrightarrow{-7} 5x - 7$$

L'écriture mathématique de p est :
 $p = 5 \times x - 7$ ou encore $p = 5x - 7$.

Voici les programmes de calcul à traduire par un schéma et une égalité mathématique.

Le programme de calcul p_1 est donné par :

- choisir un nombre,
- le multiplier par 3,
- puis retrancher 2 au résultat.

Le programme de calcul p_3 est donné par :

- choisir un nombre,
- le multiplier par 8,
- puis retrancher 10 au résultat.

Le programme de calcul p_2 est donné par :

- choisir un nombre,
- le multiplier par 4,
- puis ajouter 3 au résultat.

Le programme de calcul p_4 est donné par :

- choisir un nombre,
- lui ajouter 5,
- puis multiplier le résultat par 2.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur du programme de calcul P pour les valeurs de x données. *Faire un schéma et une phrase par calcul.*

(a) $P = 2 \times x + 1$ pour $x = 3$, $x = 4$, et $x = 2$.

(e) $P = 3,5 \times x + 7$ pour $x = 2$, $x = 1$, et $x = 10$.

(b) $P = 3 \times x - 1$ pour $x = 1$, $x = 5$, et $x = 3$.

(f) $P = 2 \times x - 1$ pour $x = 0$, $x = 1$, et $x = 5$.

(c) $P = 7 \times x + 10$ pour $x = 1$, $x = 2$, et $x = 0$.

(g) $P = 0 \times x - 1$ pour $x = 3$, $x = 4$, et $x = 2$.

(d) $P = 2 \times x - 1$ pour $x = 10$, $x = 5$, et $x = 2$.

(h) $P = 20 \times x + 0,5$ pour $x = 0, 4$, et $x = 2, 5$.

Test d'égalité et résolution d'équation

Considérons le programme de calcul P donné par $P = 3 \times x + 5$.

Intéressons-nous à la question suivante.

« Si le programme de calcul P vaut 17, peut-on trouver une valeur de x vérifiant $P = 17$ pour ce nombre x ? »

Pour répondre à cette question, on peut **tester** le programme de calcul P pour plusieurs valeurs de x .

On dit alors qu'on effectue un **test d'égalité**.

Un nombre x qui vérifierait $P = 17$ pour cet x sera appelé **une solution de l'équation $P = 17$** .

Exemple :

Pour $x = 0$,

$$P : 0 \xrightarrow{\times 3} 0 \xrightarrow{+5} 5 \dots$$

Ainsi, $3 \times 0 + 5 = 5$ pour $x = 0$.
Le nombre $x = 0$ n'est pas solution de $P = 17$.

Pour $x = 1$,

$$P : 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{+5} 8 \dots$$

Ainsi, $3 \times 1 + 5 = 8$ pour $x = 1$.
Le nombre $x = 1$ n'est pas solution de $P = 17$.

Pour $x = 3$,

$$P : 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{+5} 14 \dots$$

Ainsi, $3 \times 3 + 5 = 14$ pour $x = 3$.
Le nombre $x = 3$ n'est pas solution de $P = 17$.

Pour $x = 4$,

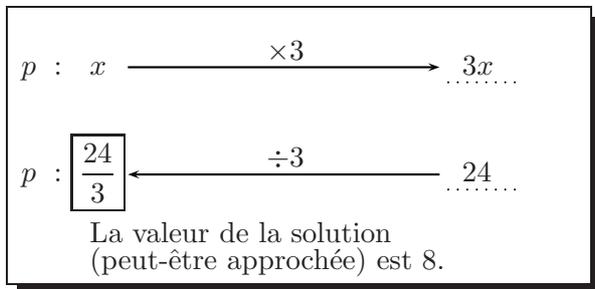
$$P : 4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{+5} 17 \dots$$

Ainsi, $3 \times 4 + 5 = 17$ pour $x = 4$.
Le nombre $x = 4$ est une solution de $P = 17$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, tester l'égalité comme dans l'exemple précédent pour les valeurs de x données. Dire si l'égalité est vraie ou fausse pour chaque valeur de x . Donner la solution de l'équation associée.

- | | |
|---|---|
| <p>(a) $P = 2 \times x + 1 = 7$ pour $x = 2$ puis $x = 3$.</p> <p>(b) $P = 3 \times x - 7 = 22$ pour $x = 1$ puis $x = 5$.</p> <p>(c) $P = 5 \times x + 0,5 = 10,5$ pour $x = 5$ puis $x = 1$.</p> | <p>(d) $P = 10 \times x - 25 = -15$ pour $x = 2$ puis $x = 1$.</p> <p>(e) $P = 2,5 \times x + 12 = 37$ pour $x = 1$ puis $x = 10$.</p> <p>(f) $P = 5 \times x - 1 = -1$ pour $x = 1$ puis $x = 0$.</p> |
|---|---|

On peut trouver « la » solution d'une équation de la forme précédente sans tester l'égalité mais en retrouvant pas à pas la solution.

Examinons la méthode de résolution.**1. Équation du type « $ax = b$ ».****Exemple :** résoudre : $3x = 24$.À l'aide d'un schéma :En écriture mathématiques :

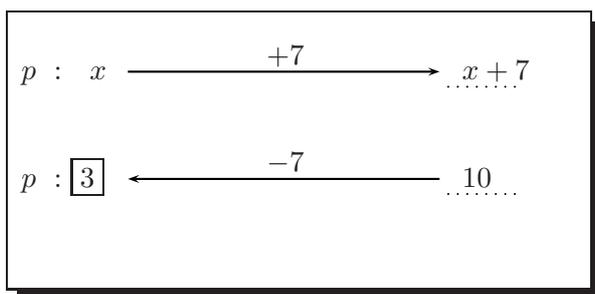
Le nombre inconnu x est le nombre qui, multiplié par 3 donne 24; c'est donc un nombre en écriture fractionnaire : $x = \frac{24}{3}$.

$$3x = 24$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$x = \frac{24}{3}$$

$$x = 8.$$

2. Équation du type « $x + a = b$ ».**Exemple :** résoudre : $x + 7 = 10$.À l'aide d'un schéma :En écriture mathématiques :

Le nombre inconnu x est le nombre qui, ajouté à 7 donne 10; c'est donc le nombre 3 : $x = 10 - 7$.

$$x + 7 = 10$$

$$x + 7 - 7 = 10 - 7$$

$$x = 3$$

Pour ne pas surcharger cette page, on ne donnera pas les schémas de construction de la solution d'équations de la forme $\frac{x}{a} = b$ et de la forme $x - a = b$... On peut adapter les schémas à partir des précédents.

D'une manière générale, pour trouver la solution d'une équation des types précédents, on effectue les **opérations inverses** des opérations faites pour construire le programme de calcul **à partir du résultat**.

Exercice 5. Résoudre en utilisant le schéma correspondant et mathématiquement les équations suivantes :

(a) $9x = 720$

(e) $x - 9 = -1$

(h) $x - 4 = \frac{2}{5}$

(b) $\frac{x}{5} = 12$

(f) $2x - 4 = 0$

(i) $3 + 7x = 24$

(c) $5 + x = 12$

(g) $\frac{3}{4} \times x = 15$

(d) $x + 8 = 24$

Problèmes divers

Lors de la résolution d'un problème, il peut souvent être utile de « mettre le problème en équation » en choisissant un nombre inconnu (à trouver) souvent noté x .

Exercice 6. Jacques est allé faire les courses ; avec 14,53 € il a acheté 1,1 kg de viande à 10,37 € le kilogramme, 230 grammes de jambon à 8,54 € le kilogramme et du pâté. Quel est le prix du pâté ?

Exercice 7. Un train emmène 1725 supporters au Stade de France pour soutenir leur équipe préférée. Sachant que chaque wagon contient 12 compartiments de 8 places, combien y a-t-il de wagons ?

Exercice 8. Sept nains veulent chacun offrir 36 roses à Blanche-Neige pour son anniversaire. Mais l'un d'entre eux, Atchoum, tombe malade et ne peut pas cueillir les fleurs. Combien chacun de ses six camarades devra-t-il cueillir de roses ?

Exercice 9. J'achète 2,8 ℓ (litres) de peinture. Je paye 44,24 €. Quel est le prix d'un litre de cette peinture ? (Tous les calculs doivent apparaître)

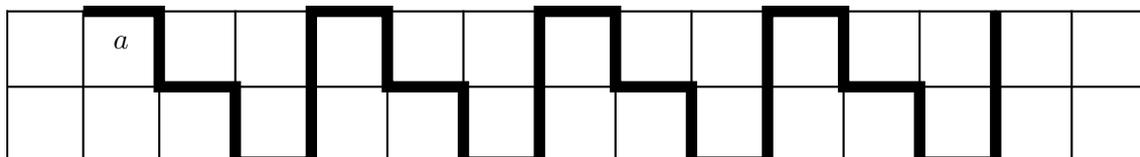
Exercice 10. Paul achète pour sa mère un bouquet de 48 fleurs. Le tiers d'entre elles sont des roses. Les $\frac{3}{8}$ du reste sont des mimosas.

- (a) Combien y a-t-il de roses dans le bouquet ?
- (b) Combien y a-t-il de mimosas ?
- (c) Combien y a-t-il d'autres fleurs (qui sont des tulipes) ?
- (d) Une rose coûte 1,22 euros, un mimosa 0,76 euro, une tulipe 0,69 euro. Écrire **sans l'effectuer** un calcul en une ligne donnant le prix du bouquet.

Exercice 11. Parmi deux classes de 5^e (c'est-à-dire 48 élèves) $\frac{3}{4}$ des élèves vont faire du ski nautique à Noeud-les-Mines. Les $\frac{5}{6}$ des élèves restants vont monter à cheval.

- (a) Quel est le nombre d'élèves qui monteront à cheval ?
- (b) Les élèves qui ne sont ni au ski ni au cheval sont dispensés de sport. Combien y a-t-il de dispensés ?

Exercice 12. On considère le schéma suivant où a désigne la longueur d'un côté de chaque carré composant la grille.



- (a) Exprimer la longueur de la ligne brisée noire en fonction de a .
- (b) Calculer cette longueur lorsque $a = 2,5$ cm puis lorsque $a = 0,5$ cm enfin lorsque $a = 3$ cm.
- (c) Trouver la valeur de a pour que la ligne mesure 168 cm.
- (d) Trouver la valeur de a pour que la ligne mesure 173,2 cm.

Exercice 13. Voici un programme de calcul :

| | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Choisir un nombre décimal ; 2. le multiplier par 4 ; 3. à ce produit, ajouter 8 ; | <ol style="list-style-type: none"> 4. multiplier cette somme par 1,25 ; 5. de ce produit, retrancher 10 6. annoncer cette différence. |
|--|--|

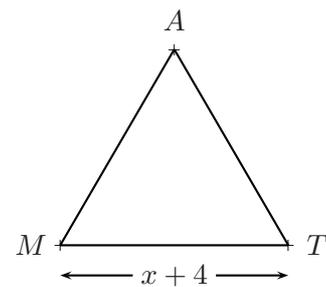
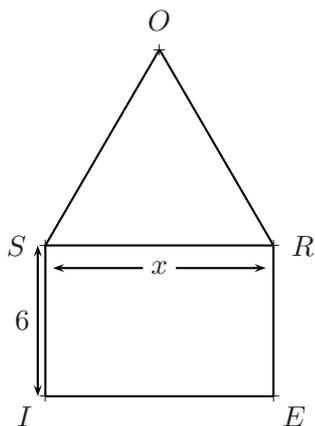
- (a) Appliquer ce programme de calcul avec 3 ; puis avec 11 ; puis avec 20,5.
- (b) Appliquer ce programme à un nombre x .
Retrouver les résultats de la première question
- (c) Quel était le nombre choisi sachant que le résultat annoncé est 80 ? Même question avec 12,5 ?

Exercice 14. Voici un programme de calcul :

| | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Choisir un nombre décimal ; 2. le multiplier par 11 ; 3. à ce produit, ajouter 5 ; 4. multiplier cette somme par 9 ; | <ol style="list-style-type: none"> 5. à ce produit, ajouter le nombre de départ ; 6. de cette somme, retrancher 10 7. annoncer cette différence. |
|--|---|

- (a) Appliquer ce programme de calcul avec 8 ; puis avec 13 ; puis avec 4,5.
- (b) Appliquer ce programme à un nombre x .
Retrouver les résultats de la première question
- (c) Quel était le nombre choisi sachant que le résultat annoncé est 80 ? Même question avec 12,5 ?

Exercice 15. Les triangles MAT et SOR ci-dessous sont des triangles équilatéraux et le quadrilatère $SIER$ est un rectangle.



- (a) Exprimer à l'aide de x le périmètre du triangle MAT .
- (b) Exprimer à l'aide de x le périmètre du pentagone $ROSIE$.
- (c) Que peut-on dire de ces deux périmètres ?