La proportionnalité et ses premières applications

Définition 0.1. On dit que deux listes de nombres x et y sont proportionnelles lorsque l'on peut passer de l'une à lautre en multipliant par un même nombre k différent de 0. Le nombre k est appelé le coefficient de proportionnalité pour passer de la liste x à la liste y.

Exemple 0.1. Les listes $x = \{2 ; 3 ; 4\}$ et $y = \{4 ; 6 ; 8\}$ sont proportionnelles.

(a) Le coefficient de proportionnalité pour passer de la liste x à la liste y est 2.

(b) Le coefficient de proportionnalité pour passer de la liste y à la liste x est $0,5$.

On peut alors disposer deux listes de nombres proportionnelles dans un tableau comme suit :

x	2	3	4
y	4	6	8

.

Exercice 1. Les listes x et y suivantes sont-elles proportionnelles ?

(a) $x = \{1 ; 10 ; 6 ; 9\}$ et $y = \{3 ; 30 ; 18 ; 27\}$;

(b) $x = \{9 ; 8 ; 8 ; 7\}$ et $y = \{27 ; 24 ; 24 ; 22\}$;

(c) $x = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$ et $y = \{3 ; 6 ; 9 ; 18\}$;

(d) $x = \{7 ; 1 ; 3 ; 4\}$ et $y = \{21 ; 3 ; 10 ; 11\}$.

Exercice 2. Recopier et compléter les tableaux de proportionnalités suivants à l'aide du coefficient k donné, qui est le coefficient pour passer de la ligne x à la ligne y.

x	2	12	7	8
y				

$k = 5$

x	-4	6	$7,5$	-100
y				

$k = -3$

x	12			21
y		$3,5$	28	

$k = 10$

Exercice 3. Recopier et compléter les tableaux suivants pour qu'ils soient des tableaux de proportionnalité. Donner alors le coefficient de proportionnalité k permettant de passer de la ligne x à la ligne y.

x	3		7	8
y	15	15		

$k = \dots$

x	4	10		2
y		70	63	

$k = \dots$

x	10		8	
y		$3,5$	28	21

$k = \dots$

Exercice 4. Même énoncé que l'exercice précédent.

x	10	7	1	
y		364		312

$k = \dots$

x		3	8	
y	$67,5$	$22,5$		15

$k = \dots$

x	8		7	4
y	$8,8$	$5,5$		

$k = \dots$

Dans un tableau de proportionnalité, il y a des égalités remarquables. Par exemple, le tableau

4	10
20	50

est un tableau de proportionnalité. On a $4 \times 50 = 10 \times 20$.
Un cas particulier important est le calcul d'un nombre manquant dans un tableau de proportionnalité contenant quatre cases : deux lignes et deux colonnes.

Définition 0.2. On appelle *quatrième proportionnelle* le nombre calculé dans un tableau de proportionnalité à deux lignes et deux colonnes connaissant les trois autres nombres.

Pour calculer une quatrième proportionnelle, on procède comme sur l'exemple suivant.

Exemple 0.2. La quatrième proportionnelle du tableau de proportionnalité suivant est notée x :

8	10
2	x

.
On a : $x = 2 \times 10 \div 8 = 2,5$.

Exercice 5. Calculer la quatrième proportionnelle dans chacun des tableaux de proportionnalité suivants :

14	7
	8

8	5
	25

5	
45	9

4	3
	$7,5$

4	3
12	

Exercice 6. Calculer la quatrième proportionnelle dans chacun des tableaux de proportionnalité suivants :

5	10
	90

3	7
21	

	9
$41,6$	$46,8$

4	
-10	$12,5$

-9	6
	-60

Essayons de généraliser cette notion de proportionnalité à un nombre plus important de points.

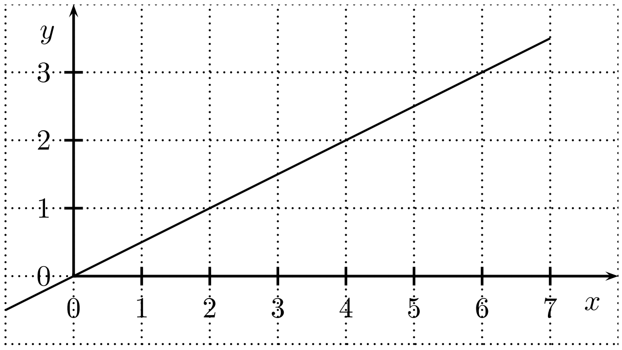
Exercice 7. On considère le tableau suivant :

x	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5	$5,5$	6	$6,5$	7
y	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2	$2,25$	$2,5$	$2,75$	3	$3,25$	$3,5$

Quel est le coefficient de proportionnalité k qui permet de passer de la ligne x à la ligne y ?

En observant le tableau et le graphique suivant, expliquer comment a été construit ce graphique.

Que peut-on en déduire de la **représentation graphique** d'une situation de proportionnalité ?



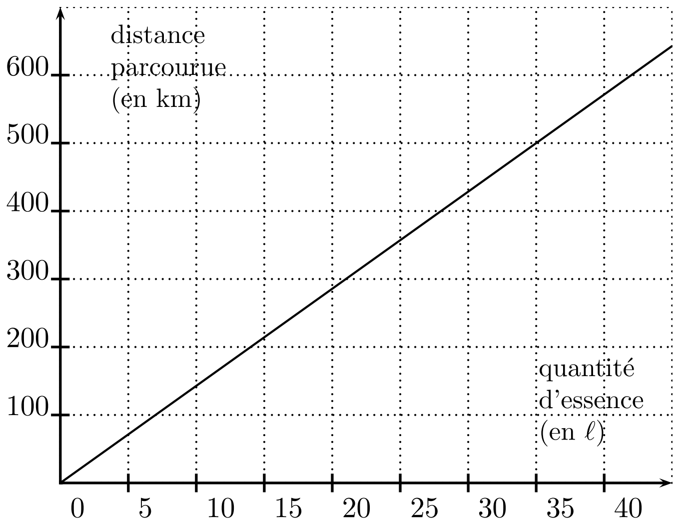
Exercice 8. Le nombre de kilimètres parcourus par une voiture varie proportionnellement à la quantité d'essence consommée. Les données de cette situation sont reportées dans le graphique ci-dessous.

(a) À l'aide du graphique, déterminer la quantité d'essence utile pour parcourir 500 km.

(b) En calculant une quatrième proportionnelle, déterminer la quantité d'essence utile pour parcourir 100 km.

(c) Déterminer graphiquement la distance approximative parcourue avec 20 litres d'essence, puis la distance approximative parcourue avec 10 litres d'essence.

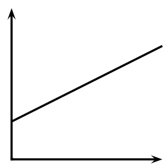
(d) Déterminer graphiquement la quantité d'essence utile pour parcourir 300 km ; puis 450 km.

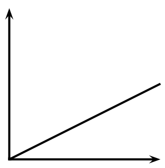


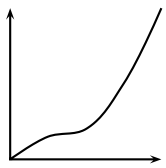
Compléter le tableau ci-dessous avec la donnée de la question (a), puis vérifier les résultats des questions suivantes à l'aide de ce tableau de proportionnalité.

Quantité d'essence (en km)						
Distance parcourue (en ℓ)						

Exercice 9. Quel graphique représente une situation de proportionnalité ? Justifier.





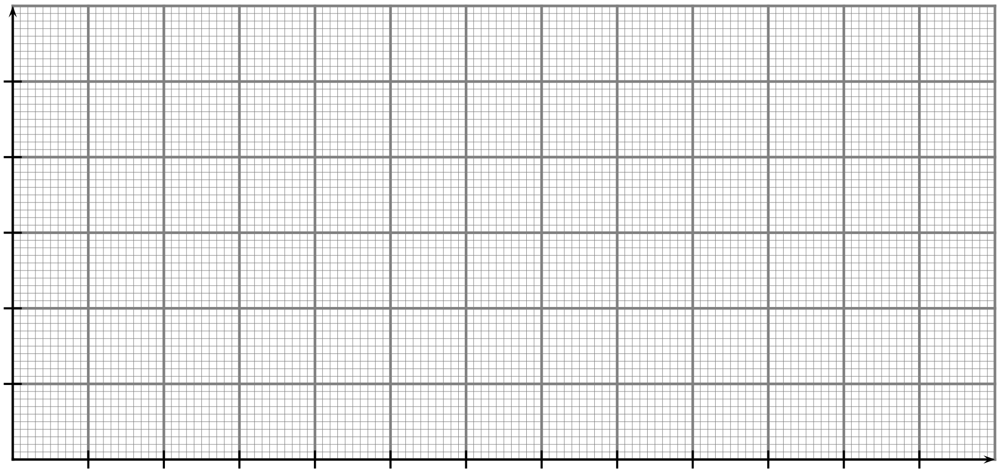


Trois compagnies de taxi proposent des tarifs (en euros) proportionnels à la distance parcourue (en km).

Compagnie Bleue		
Distance	50	120
Tarif	10	24

Compagnie Rouge		
Distance	50	120
Tarif	6	14,4

Compagnie Verte		
Distance	40	100
Tarif	3,2	8



1. En utilisant des couleurs, représenter les données sur le papier milimétré ci-dessus.
2. Pour chacune des trois compagnires, lire sur le graphique le tarif d'une course de 110 km.
3. Pour chacune des trois compagnires, lire sur le graphique la distance parcourue pour une somme de 20 € .

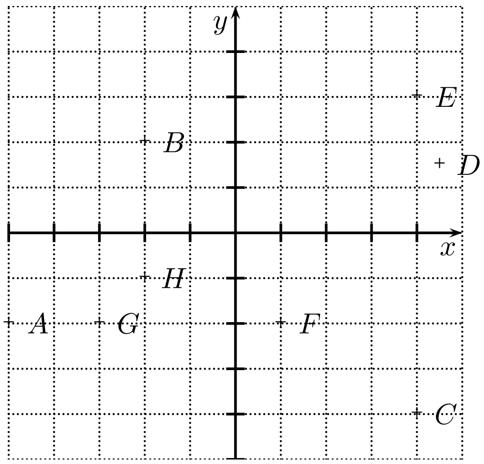
Appliquons les résultats trouvés sur la représentation graphique d'une situation de proportionnalité en considérant des points du plan. Dans un plan, un point est repéré par deux nombres : son **abscisse** notée x et son **ordonnée** notée y. Ainsi, le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 2 se note $A(1\ ;\ 2)$. On dit alors que $(1\ ;\ 2)$ est le couple de **coordonnées** du point A.

Exercice 10.

1. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide du graphique suivant.

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
x(abscisse)								
y(ordonnée)								

2. Donner les couples de coordonnées des points A à H comme sur l'exemple $A(-5\ ;\ -2)$.



Appliquons à présent une situation de proportionnalité au calcul d'un pourcentage.
Un pourcentage est un quotient dont le dénominateur est égal à 100. Par exemple, 3 pour cent se note 3 % et vaut $\frac{3}{100}$.

Exemple 0.3. Dire que 15 % des 1000 électeurs d'une commune ont voté pour le candidat C signifie que 15 électeurs sur 100 ont voté pour le candidat C ; autrement dit 150 électeurs ont voté pour le candidat C.

> En pratique pour calculer un pourcentage de t % d'une quantité X, on multiplie le quotient $\frac{t}{100}$ par X.

Dans l'exemple précédent, le calcul est le suivant : $\frac{15}{100} \times 1000 = \frac{15 \times 1000}{100} = 150$.

On peut également utiliser un calcul de quatrième proportionnelle pour calculer un pourcentage oupour déterminer une donnée à partir d'un pourcentage. On peut alors écrire cela de plusieurs manières :

Première méthode

$$\begin{cases} 15 \longrightarrow 100 \\ x \longrightarrow 1000 \end{cases}$$

La **flèche** signifie alors : « *correspond à.* »

Deuxième méthode

$$\begin{cases} 15 \quad \textbf{pour} \quad 100 \\ x \quad \textbf{pour} \quad 1000 \end{cases}$$

Il faut ensuite passer proportionnellement de 100 à 1000 et de la même manière de 15 à x.

Troisième méthode

Part	**Total**
15	100
x	1000

Et ensuite, on calcule une quatrième proportionnelle.

Exercice 11.

1. Que représente 25 % de 1600 ?
2. Parmi les 160 invités de l'ambassadeur, 25 % n'ont pas mangé de rocher au chocolat. Quel est le nombre d'invités ayant boudé les sucreries de leur hôte ?
3. Une chaîne hi-fi coûte 170 € hors taxes auxquels il faut ajouter 9,35 € de TVA. Quel est le pourcentage de TVA ?
4. Dans un musée, sur une collection de 30 tableaux, 17 sont des tableaux du dix-huitième siècle. Quel est le pourcentage de tableaux du dix-huitième siècle.
5. Dans un fromage de 140 grammes, il y a 45 % de matière grasse. Quelle est la quantité de matière grasse dans ce fromage ?

Exercice 12. Sur mon lecteur MP3, il y a 72 morceaux qui peuvent se classer dans les catégories suivantes : 40 % de variété ; 25 % de Rn'B et 20 % de Rap.

1. Calculer le nombre de morceaux pour chaque catégorie.
2. Combien y a-t-il de morceaux qui ne figurent dans aucune des trois catégories.

Exercice 13. Dans le stylo quatre couleurs de Sarah, il reste : 10 % de bleu ; 50 % de rouge ; 23 % de noir et 78 % de vert. Sachant qu'avec un stylo neuf on peut tracer un segment de 2,5 km avec chaque couleur, calculer la longueur totale du segment que Sarah pourrait tracer avec son stylo.

Exercice 14. En moyenne, dans un collège, 19 élèves sur cent portent des lunettes.

1. Combien y a-t-il (en moyenne) d'élèves portant des lunettes dans un collège de 850 élèves ?
2. Combien y a-t-il (en moyenne) d'élèves portant des lunettes dans un collège de 190 élèves ?
3. Combien y a-t-il (en moyenne) d'élèves dans un collège où 57 élèves portent de lunettes ?