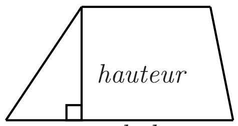
4$^{\text{e}}$ - Activité : une propriété du triangle rectangle

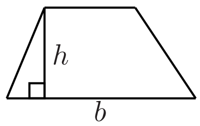
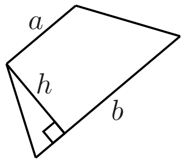
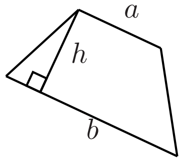
Première partie : calcul de l'aire d'un trapèze

Dans cette partie, on rappelle que l'aire d'un trapèze de petite base a, de grande base b et de hauteur h est donnée par la formule :



$$\mathcal{A} = \frac{(a+b)\times h}{2} \text{ ou encore } \mathcal{A} = \frac{(grande\ base + petite\ base) \times\ hauteur}{2}$$

Question : calculer l'aire de chacun des trapèzes suivants :

	Trapèze 1	**Trapèze 2**	**Trapèze 3**
			
Grande base :	7	8	12
Petite base :	2	3	9
Hauteur :	6	8	8
Aire :			

Deuxième partie : utilisation pour le calcul de l'aire d'un carré

But : calculer l'aire du carré $ABDE$ sans connaître la longueur du côté $c = AB$.

Sous-partie 1 : étude d'un cas particulier

On considère la figure ci-contre. Voici les données :
- le triangle ABC est un triangle rectangle en C ;
- le triangle AEF est un triangle rectangle en F ;
- les points C, A et F sont alignés ;
- le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme ;
- On donne : $\begin{cases} a = 1\,; \\ b = 5\,; \\ c = AB \text{ est } \textit{inconnu}. \end{cases}$

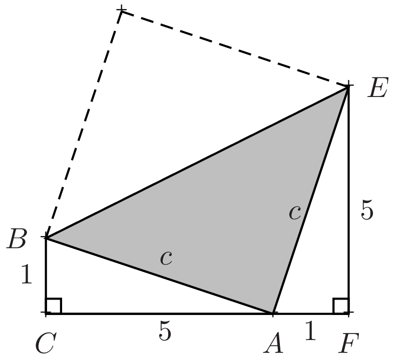


FIG. 1 - *configuration sur un exemple*

Question : calculer (en utilisant la première partie) l'aire du quadrilatère $ABDE$.

Sous-partie 2 : étude du cas général

On considère à présent une configuration identique à celle de la première partie ; où l'on fait varier les longueurs $a = BC = AF$ et $b = AC = EF$. On s'intéresse à nouveau à l'aire du carré de côté c. La longueur c est toujours inconnue.

Voici les données :
- le triangle ABC est un triangle rectangle en C ;
- le triangle AEF est un triangle rectangle en F ;
- les points C, A et F sont alignés ;
- On note : $\begin{cases} a = BC\,; \\ b = AC\,; \\ c = AB. \end{cases}$

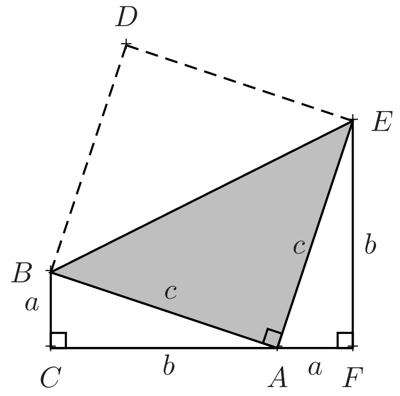
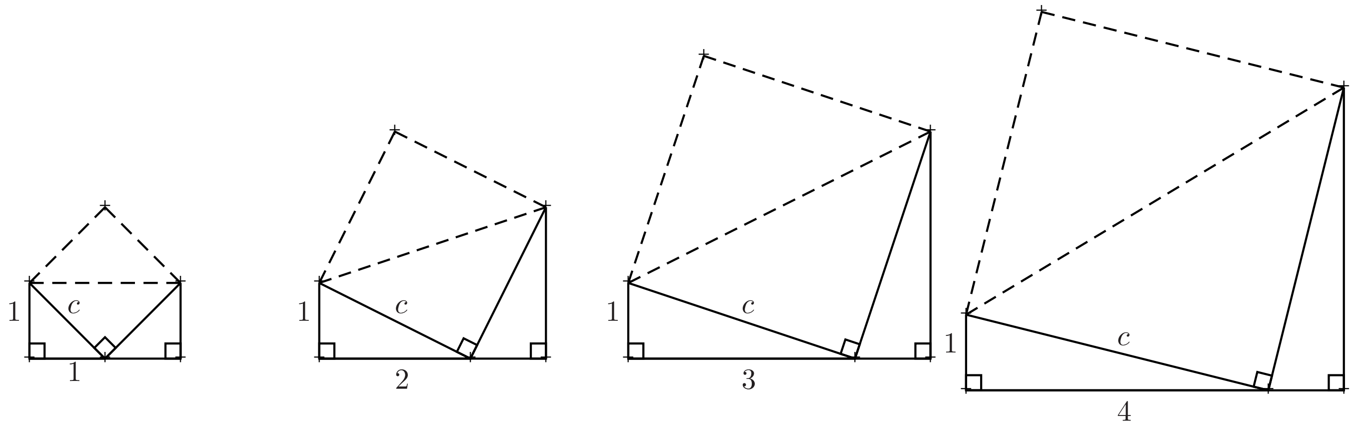


FIG. 2 - *configuration du cas général*

Exemple-illustration : cas de la variation de la longueur b pour $a = 1$.



Question : déterminer un *lien* entre les nombres a, b et c.

Pour répondre à cette question, on utilisera l'étude précédente et les annexes données dans la suite.

Annexe 1 - « évolution de l'aire du carré $ABDE$ avec l'évolution des longueurs a et b »

a	b	**aire de** $ABDE$
1	1	2
1	2	5
1	3	10
1	4	17
1	5	26
1	6	37
1	7	50
1	8	65
1	9	82
1	10	101

a	b	**aire de** $ABDE$
2	2	8
2	3	13
2	4	20
2	5	29
2	6	40
2	7	53
2	8	68
2	9	85
2	10	104

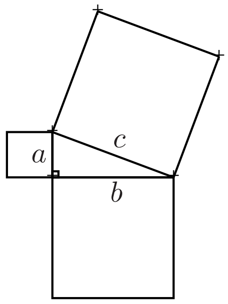
a	b	**aire de** $ABDE$
3	3	18
3	4	25
3	5	34
3	6	45
3	7	58
3	8	73
3	9	90
3	10	109

a	b	**aire de** $ABDE$
4	4	32
4	5	41
4	6	52
4	7	65
4	8	80
4	9	97
4	10	116

a	b	**aire de** $ABDE$
5	5	50
5	6	61
5	7	74
5	8	89
5	9	106
5	10	125

Dans chaque cas, l'aire du carré $ABDE$ a été calculée à l'aide de la méthode de la première partie de l'activité.

Annexe 2 - « comparaison des aires des différents carrés »



Ici, on a construit sur les côtés du triangle rectangle de côtés a, b et c trois carrés de côtés respectifs a, b et c.

Dans les tableaux ci-après, l'aire du carré de côté c a été calculée à l'aide de la méthode employée dans la première partie.

a	b	**aire du carré de côté** a	**aire du carré de côté** b	**aire du carré de côté** c
1	1	1	1	2
1	2	1	4	5
1	3	1	9	10
1	4	1	16	17
1	5	1	25	26
1	6	1	36	37
1	7	1	49	50
1	8	1	64	65
1	9	1	81	82
1	10	1	100	101
1	11	1	121	122
1	12	1	144	145
1	13	1	169	170
1	14	1	196	197
1	15	1	225	226
1	16	1	256	257
1	17	1	289	290
1	18	1	324	325
1	19	1	361	362
1	20	1	400	401

a	b	**aire du carré de côté** a	**aire du carré de côté** b	**aire du carré de côté** c
2	2	4	4	8
2	3	4	9	13
2	4	4	16	20
2	5	4	25	29
2	6	4	36	40
2	7	4	49	53
2	8	4	64	68
2	9	4	81	85
2	10	4	100	104
2	11	4	121	125
2	12	4	144	148
2	13	4	169	173
2	14	4	196	200
2	15	4	225	229
2	16	4	256	260
2	17	4	289	293
2	18	4	324	328
2	19	4	361	365
2	20	4	400	404

a	b	**aire du carré de côté** a	**aire du carré de côté** b	**aire du carré de côté** c
3	3	9	9	18
3	4	9	16	25
3	5	9	25	34
3	6	9	36	45
3	7	9	49	58
3	8	9	64	73
3	9	9	81	90
3	10	9	100	109
3	11	9	121	130
3	12	9	144	153
3	13	9	169	178
3	14	9	196	205
3	15	9	225	234
3	16	9	256	265
3	17	9	289	298
3	18	9	324	333
3	19	9	361	370
3	20	9	400	409

a	b	**aire du carré de côté** a	**aire du carré de côté** b	**aire du carré de côté** c
4	4	16	16	32
4	5	16	25	41
4	6	16	36	52
4	7	16	49	65
4	8	16	64	80
4	9	16	81	97
4	10	16	100	116
4	11	16	121	137
4	12	16	144	160
4	13	16	169	185
4	14	16	196	212
4	15	16	225	241
4	16	16	256	272
4	17	16	289	305
4	18	16	324	340
4	19	16	361	377
4	20	16	400	416

On continue ainsi en faisant varier de plus en plus les longueurs a et b.