Calcul littéral, programme de calcul, développement et factorisation

François Meria

1 Introduction

Un calcul se fait à l'aide de nombres. S'il y a plusieurs calculs se ressemblant à effectuer, il est souvent laborieux de refaire tous les calculs à chaque fois. Aussi, pour effectuer des calculs qui se reproduisent on utilise souvent une formule. Comme exemple de formule, citons celle donnant l'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté $c > 0$,

$$\mathcal{A} = c^2 \tag{1}$$

Ainsi, pour calculer l'aire de plusieurs carrés dont les longueurs des côtés sont données, on *remplace* la valeur de la lettre c dans l'expression (1) par sa valeur numérique. Voici un exemple du calcul de plusieurs aires à partir de cette formule.

Longueur du côté c	Calcul de l'aire $\mathcal{A}$	Aire du carré de côté c
2	2^2	4
3	3^2	9
4	4^2	16
5	5^2	25
6	6^2	36
7	7^2	49

On voit alors que cette formule apparaît comme un *programme* pour effectuer des calculs. Il est donc assez naturel, comme nous le verrons plus loin de nommer une telle expression un *programme de calcul.*

Par ailleurs, puisque nous allons *calculer* avec des lettres et que ces lettres représenterons des nombres, il faudra évidemment respecter les règles déjà connues pour les calculs avec les nombres et, la fin du chapitre nous donnera l'occasion d'introduire de nouvelles règles de calcul que l'on pourra utiliser avec des lettres ou des nombres.

2 Calcul litteral et programme de calcul

2.1 Calculs et premières règles

Définition 2.1. Une expression littérale est une suite d'opérations comportant des lettres et des nombres relatifs. Ces lettres désignent des nombres relatifs. Les lettres intervenant dans une expression littérale sont appelées des variables.

Exemple 2.1. Les expressions suivantes sont des expressions littérales où les lettres a, b, x, y et z désignent des nombres relatifs.

$$2 \times a + a \times b - 9 \qquad\qquad x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \qquad\qquad 3x^2 + 2x \times xy + \frac{z}{3}$$

Remarque 2.1. Une expression littérale est aussi appelée une somme algébrique, une expression algébrique ou un programme de calcul. Il peut arriver qu'une expression littérale comporte des parenthèses. Comme chaque variable représente un nombre relatif, les règles de changement de signes s'appliquent, ainsi que les règles de priorité dans les calculs.

Donnons quelques règles d'utilisation très fréquente dans des expressions littérales et dans les calculs numériques.

Méthode 1. `(Supprimer les parenthèses dans une expression littérale)`
Parenthèse précédée d'un signe $+$: on recopie tout simplement l'expression qu'elle en supprimant les parenthèses. *Exemple*

$$x + (2x - 4) = x + 2x - 4$$

Parenthèse précédée d'un signe $-$: on recopie l'expression en supprimant les parenthèses et en changeant tous les signes à l'intérieur de celles-ci : les $+$ *se changent* en $-$ et les $-$ *se changent* en $+$. *Exemple*

$$x - (2x - 4) = x - 2x + 4$$

Définition 2.2. La valeur numérique d'une expression littérale ou d'un programme de calcul pour des valeurs données des variables est le nombre obtenu en effectuant la suite d'opérations avec ces valeurs.

Remarque 2.2. Un programme de calcul est en quelque sorte une machine à fabriquer des nombres.

Méthode 2. `(Calculer la valeur numérique d'une expression algébrique)`
Le principe est le suivant : on remplace les lettres par leur valeur numérique dans l'expression donnée.

Exemple 2.2. Calculer la valeur du programme de calcul P (ou du calcul littéral) suivant

$$P = 3 \times x + 5 - y$$

pour les valeurs $x = 8$ et $y = -2$. On a

$$\left\{\begin{array}{lll} P & = & 3 \times x + 5 - y \\ & = & 3 \times 8 + 5 - (-2) \\ & = & 24 + 5 + 2 \\ & = & 31 \end{array}\right.$$

On conclut alors que la valeur du programme de calcul $P = 3 \times x + 5 - y$ pour les valeurs $x = 8$ et $y = -2$ est $P = 31$.

Exemple 2.3. Il est possible que dans des expressions littérales, la même variable apparaisse sous plusieus formes, comme dans l'expression suivante

$$Q = 3 \times x + x^2 - 1 \tag{2}$$

En se rappelant que l'expression x^2 signifie $x \times x$, le calcul précédent se fait donc en calculant en premier lieu le terme x^2 et le terme $3 \times x$...
Calculons la valeur numérique de l'expression (2) pour la valeur $x = -2,5$. On a

$$\left\{\begin{array}{lll} Q & = & 3 \times x + x^2 - 1 \\ & = & 3 \times (-2,5) + (-2,5)^2 - 1 \\ & = & -7,5 + 6,25 - 1 \\ & = & -2,25 \end{array}\right.$$

On conclut alors que la valeur du programme de calcul $Q = 3 \times x + x^2 - 1$ pour la valeur $x = -2,5$ est $Q = -2,25$.

2.2 Simplification d'une expression littérale

Dans une expression littérale, il peut arriver que plusieurs termes comportant la même variable apparaissent, il est alors inutile de faire des calculs séparés, et il est beaucoup plus efficace de regrouper tous les termes qui ont un élément en commun. Ainsi, pour effectuer des calculs avec l'expression

$$K = 3 \times x + 2 \times x - 18 \times x + 6 \times x + 5x + 1 \tag{3}$$

il peut s'avérer que les calculs intermédiaires soient longs, alors qu'il y a une méthode assez simple pour que le calcul de K soit très rapide. En effet, dans l'expression (3), le terme x apparaît plusieurs fois

1. Il est d'abord multiplié par 3 ;

2. puis il est multiplié par 2 ;
3. ensuite il est multiplié par 18 puis le résultat est soustrait ;
4. il est multiplié par 6 ;
5. et enfin, il est multiplié par 5.

En fait, le nombre x apparaît $3 + 2 - 18 + 6 + 5$ fois soit en réalité -2 fois. Ainsi, le programme de calcul K peut s'écrire de manière plus simple

$$K = -2 \times x + 1 \tag{4}$$

Se pose alors la question : est-il plus simple de calculer la valeur numérique de K pour un nombre x donné à l'aide de l'expression (3) ou à l'aide de l'expression (4) ? La réponse semble évidente, c'est l'expression (4) qui est la plus simple. Le procédé que l'on a utilisé pour donner une expression plus simple du programme de calcul K s'appelle la réduction d'une expression littérale. Sa justification réside dans une propriété vue en classe de cinquième : la factorisation. Expliquons-là en détails.

Rappelons la règle de cinquième évoquée plus haut.

Propriété 2.1. Pour tous les nombres k, a et b, on a

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \tag{5}$$

et bien entendu

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b) \tag{6}$$

En utilisant la relation (6) et le fait que $a \times b = b \times a$, on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} K &= 3 \times x + 2 \times x - 18 \times x + 6 \times x + 5x + 1 \\ &= x \times (3 + 2) - 18 \times x + 6 \times x + 5x + 1 \\ &= 5 \times x - 18 \times x + 6 \times x + 5x + 1 \\ &= x \times (5 - 18) + 6 \times x + 5x + 1 \\ &= -13x + 6 \times x + 5x + 1 \\ &= x \times (-13 + 6) + 5x + 1 \\ &= -7x + 5x + 1 \\ &= x \times (-7 + 5) + 1 \\ &= -2 \times x + 1 \end{aligned}\right.$$

Remarquons que l'on ne peut pas factoriser la dernière expression car le nombre x n'apparaît que dans l'expression $-2 \times x$ et pas dans le nombre 1.

Définition 2.3. Réduire une expression littérale (ou une somme algébrique) c'est l'écrire en utilisant chaque partie littérale une seule fois.

3 Développement et factorisation

Dans ce paragraphe, il s'agit de généraliser la propriété 2.1 de cinquième rappelée plus haut,

Définition 3.1.

1. *Développer*, c'est écrire un produit sous la forme d'une somme algébrique ; et
2. *factoriser*, c'est écrire une somme sous la forme d'un produit.

Voyons comment il est possible de dévelloper un calcul en s'appuyant sur un exemple concret.

On considère la figure suivante :

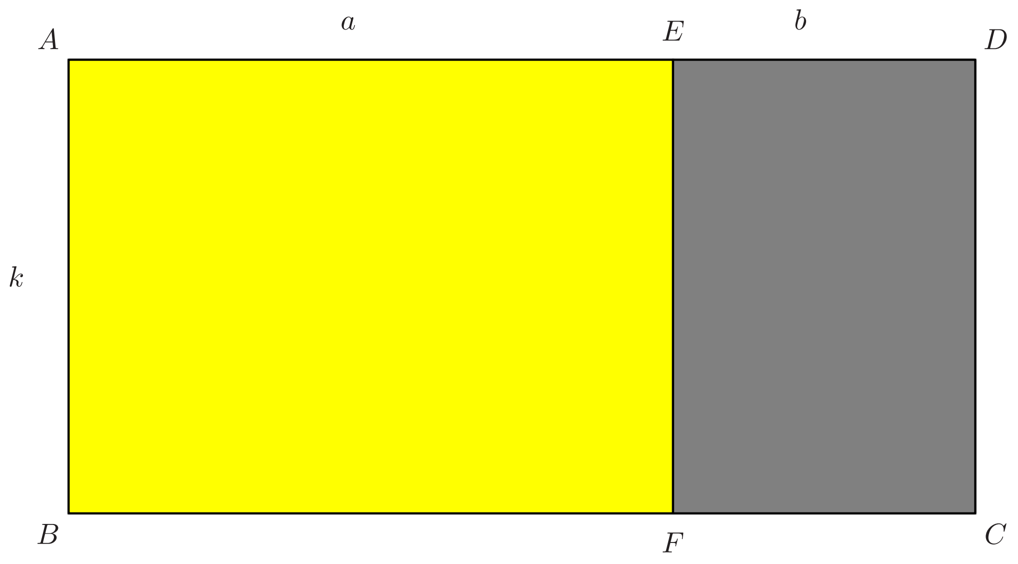

FIG. 1 – *Illustration de la relation* $k(a+b) = ka + kb$

L'aire du rectangle $ABCD$ peut s'exprimer de deux manières différentes : la première à l'aide de la formule donnant l'aire d'un rectangle

$$\mathcal{A}_{ABCD} = longueur \times largeur$$

et la deuxième, comme somme des aires des deux rectangles $ABFE$ et $EFCD$.

On a

1^{er} calcul de l'aire de $\mathcal{A}_{ABCD}$ à l'aide de la formule donnant l'aire d'un rectangle	$\mathcal{A}_{ABCD} = k \times (a+b)$
2^{e} calcul de l'aire de $\mathcal{A}_{ABCD}$ en faisant la somme des aires des rectangles $ABFE$ et $EFCD$	$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABFE} + \mathcal{A}_{EFCD}$ $= k \times a + k \times b$

Ainsi, la relation

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

est vraie lorsque les nombres k, a et b peuvent être choisis comme des longueurs de segments. On admettra que l'on peut généraliser cette règle de calcul à n'importe quels nombres.

Voici à présent la propriété qui est d'utilité très fréquente.

Propriété 3.1. Pour tous les nombres a, b, c d et k on a les résultats suivants

`Développement`	`factorisation`
$k \times (a+b) = ka + kb$ $k \times (a-b) = ka - kb$	$ka + kb = k \times (a+b)$ $ka - kb = k \times (a-b)$
$(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$ $(a+b) \times (c-d) = ac - ad + bc - bd$	$ac + ad + bc + bd = (a+b) \times (c+d)$ $ac - ad + bc - bd = (a+b) \times (c-d)$

On peut imaginer une autre situation concrète pour justifier la généralisation

$$(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Mais, pour utiliser ce que l'on connaît déjà, nous allons démontrer cette relation ainsi que la relation

$$(a+b) \times (c-d) = ac - ad + bc - bd$$

Démonstration. Étant donné des nombres a, b, c et d, posons $k = (a+b)$. On a alors

$$(a+b) \times (c+d) = k \times (c+d) \tag{7}$$

D'après la propriete 2.1, cette relation (7), on a

$$k \times (c+d) = k \times c + k \times d \tag{8}$$

Or, $k \times c = (a+b) \times c = ac + bc$ d'une part et $k \times d = (a+b) \times d = ad + bd$ d'autre part, ainsi on peut écrire

$$(a+b) \times (c+d) = k \times (c+d) = ac + ad + bc + bd \tag{9}$$

Pour démontrer la relation $(a+b) \times (c-d) = ac - ad + bc - bd$, il suffit de remarquer que $a - b = a + (-b)$ et ensuite de reporter cette expression dans la relation (9). $\square$

Terminons ce chapitre par quelques exemples.

Exemple 3.1. Développer les expressions suivantes : (le faire)

$$\begin{array}{rcl} 3 & \times & (20+1) \\ k & \times & (3+5) \\ (2+5) & \times & (3+7) \\ (5-6) & \times & (6+5) \end{array}$$