Calcul numérique : opérations avec les nombres relatifs

François Meria

1 Introduction

La définition d'un nombre relatif est vue en classe de sixième et la somme et la soustraction de deux nombres relatifs sont vues en classe de cinquième. Néanmoins, nous allons faire quelques rappels pour fixer les idées et pour avoir une base de travail commune.

Si on ne connaît que les nombres positifs tels que 3 ou $34,71$, il peut se produire que des calculs soient parfaitement réalisables sans que les calculs intermédiaires le soient. En effet, voyons comment on peut calculer le résultat de la différence suivante

$$12 - 25 \tag{1}$$

Cette opération n'est *a priori* pas réalisable, mais elle a tout de même un sens. Par exemple, il est tout à fait envisageable que deux élèves jouent aux billes, que le premier élève gagne 12 billes lors d'une première partie, puis qu'il en perde 25 lors d'une deuxième partie. On voit rapidement que cet élève devra puiser dans son stock (ou capital) de billes pour pouvoir « payer » ses dettes (en billes). Il paraît alors clair qu'il devra prendre 13 billes dans son stock pour les donner à son adversaire, il aura donc, au total, perdu 13 billes.
Voyons comment on peut rendre possible l'opération (1). Pour cela, imaginons que ce calcul ait un résultat que l'on appelle r. On a ainsi

$$12 - 25 = r \tag{2}$$

Ajoutons à ce nombre un nombre assez grand, disons par exemple 20. On obtient alors à partir de l'opération (2)

$$\mathbf{20} + 12 - 25 = \mathbf{20} + r \tag{3}$$

Ainsi, on a $32 - 25 = 20 + r$ ou encore

$$7 = 20 + r \tag{4}$$

ou encore en décomposant 20 en $7 + 13$

$$7 = 7 + 13 + r \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{0 = 13 + r} \tag{6}$$

On voit alors que si le calcul (1) est un nombre, alors ce nombre est un nombre qui ajouté à 13 donne 0. Il est clair qu'il n'y a pas de nombre positif qui ajouté à 13 donne 0.
Nous avons choisi le nombre 20 pour proposer ce calcul, mais si nous choisissons n'importe quel autre nombre assez grand (en fait un nombre $\geqslant 13$), on aboutira toujours au même calcul (6) soit « $0 = 13 + r$ ».
On voit ainsi que le nombre r est fortement lié au nombre 13. Il faut pouvoir distinguer ce nouveau nombre du nombre 13, on choisit alors de le noter (-13). Nous venons de donner un *sens*, à l'aide de cette étude, au nombre $r = 12 - 25$ en posant $12 - 25 = (-13)$ soit $r = (-13)$.

Remarque 1.1. On a choisi d'écrire (-13) pour ce résultat, mais on aurait pu choisir tout aussi bien une autre notation, comme par exemple $\overset{-}{13}$ ou encore $\underset{\circ}{13}$ et bien d'autres encore. Néanmoins, cette notation est justifiée par le fait que lors de calculs, ce que nous verrons plus tard, ajouter le nombre (-13) revient à soustraire le nombre 13.

Nous sommes alors en mesure de donner une définition d'un nombre négatif.

Définition 1.1. Étant donné un nombre a positif, le nombre qui ajouté à a donne 0 est noté $(-a)$ ou plus simplement $-a$. On dit alors que le nombre $(-a)$ est un nombre négatif. Autrement dit, on a, par définition

$$a + (-a) = 0 \text{ ou } (-a) + a = 0 \tag{7}$$

Exemple 1.1. Le nombre (-5) est négatif car 5 est positif et par définition $5 + (-5) = 0$.

On peut généraliser cette définition 1.1 à l'aide de la définition 1.2 suivante.

Définition 1.2. Étant donné un nombre décimal a (positif ou négatif), on appelle opposé de a et on note $(-a)$ ou $-a$ le nombre qui, ajouté à a donne 0. Autrement dit, si a est un nombre décimal quelconque, on a

$$(-a) + a = 0 \tag{8}$$

Exemple 1.2. On peut dire que

1. Le nombre $(-6,1)$ est l'opposé du nombre $6,1$ car $(-6,1) + 6,1 = 0$.
2. Le nombre 3 est l'opposé du nombre (-3) car $3 + (-3) = 0$.

Définition 1.3. Si on réunit les nombres décimaux positifs déjà connus et les nombres négatifs que l'on a créés, on obtient l'ensemble des nombres relatifs.

Autrement dit, on dit qu'un nombre est un nombre relatif si ce nombre est un nombre décimal positif ou s'il est un nombre décimal négatif.

Exemple 1.3. Les nombres 5 et $-5,6$ par exemple sont des nombres relatifs.

De manière générale, un nombre relatif est « repéré » par deux éléments : son *signe* et sa *partie numérique*. Par exemple

Nombre	Signe	Partie numérique
$+5$	$+$	5
$-3,2$	$-$	3,2

Remarque 1.2. Pour désigner la partie numérique d'un nombre relatif, on parle également souvent de distance à 0 du nombre. Cette terminologie sera beaucoup plus utilisée dès la classe de seconde avec l'introduction de la notion de *valeur absolue* d'un nombre relatif.

2 Addition et soustraction de nombres relatifs

2.1 Addition de deux nombres relatifs

Comme dans l'introduction, il n'est pas très commode de revenir de manière systématique sur les calculs donnés dans l'exemple pris pour la compréhension de l'introduction des nouveaux nombres (les nombres négatifs), on a évidemment besoin de règles de calcul utilisables avec les nombres relatifs. Il est bien entendu primordial que les règles de calcul que nous allons définir soient compatibles avec les règles de calcul définies pour les nombres décimaux positifs. Heureusement, les opérations que nous introduisons sont compatibles avec les opérations déjà définies depuis les classes primaires avec les nombres positifs.

Définition 2.1. L'addition est l'opération qui, à deux nombres relatifs a et b, associe leur *somme* $a + b$. Les nombres a et b sont appelés les *termes* de la somme ou de l'opération.

Il y a trois cas qui apparaissent lorsque nous voulons additionner deux nombres relatifs : on peut ajouter soit

1. deux nombres positifs. Dans ce cas, pas de changement pour ce qui est de la règle de calcul, ces nombres ont le même signe « + » ;
2. deux nombres négatifs. Ces nombres ont encore le même signe « − ».
3. deux nombres ayant des signes différents : un positif et un négatif ou un négatif et un positif. Dans ce cas, le résultat a le signe du nombre ayant la plus grande partie numérique.

Les quatre cas de l'exemple 2.1 donnent une méthode de calcul pour effectuer la somme de deux nomrbes relatifs.

Exemple 2.1. On a

1	$(+4,5)+(+9)=(+13,5)$ Les deux nombres sont positifs ; leur somme est positive elle aussi. Écriture simplifiée : $4,5+9=13,5$	**3**	$(+12,8)+(-5,7)=(+7,1)$ Les deux nombres sont de signes différents ; $12,8 > 5,7$; la somme est positive comme $(+12,8)$. Écriture simplifiée : $12,8-5,7=7,1$
2	$(-7,1)+(-2,5)=(-9,6)$ Les deux nombres sont négatifs ; leur somme est négative elle aussi. Écriture simplifiée : $-7,1-2,5=-9,6$	**4**	$(+5,9)+(-10)=(-4,1)$ Les deux nombres sont de signes différents ; $10 > 5,9$; la somme est négative comme (-10). Écriture simplifiée : $5,9-10=-4,1$

Voici la méthode générale.

Méthode 1. Pour additionner deux nombres relatifs a et b, on procède comme suit.

1$^{\text{er}}$ cas	a et b ont le même signe $+$	on additionne les parties numériques et on ajoute le signe $+$ au résultat
2$^{\text{e}}$ cas	a et b ont le même signe $-$	on additionne les parties numériques et on ajoute le signe $-$ au résultat
3$^{\text{e}}$ cas	a et b ont des signes différents	on soustrait la plus petite partie numérique de la plus grande et on ajoute le signe du nombre ayant la plus grande partie numérique au résultat

Propriété 2.1. Dans une somme de plusieurs termes, on peut changer l'ordre des termes. On peut aussi remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.

Exemple 2.2. On a

1$^{\text{er}}$ calcul : $3+(-5)+2=3+2+(-5)=5+(-5)=0$.
2$^{\text{e}}$ calcul : $18+(-12)+2+(-3)=20+(-15)=5$.

2.2 Soustraction de deux nombres relatifs

Définition 2.2. La soustraction est l'opération qui, à deux nombres relatifs a et b, associe leur différence $a-b$. Les nombres a et b sont les termes de la différence.

Propriété 2.2. Soustraire un nombre relatif b au nombre relatif a, c'est ajouter à a l'opposé de b.

Il est important de pouvoir faire le lien entre l'addition et la soustraction de deux nombres relatifs. C'est pourquoi nous allons donner un exemple détaillé puis la démonstration de la propriété 2.2 pour généraliser cet exemple.

Exemple 2.3. Posons $x = 3 - (+7)$ et démontrons que l'on peut écrire $x = 3 + (-7)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} x & = & 3-(+7) & \text{opération de départ} \\ x+7 & = & 3-(+7)+7 & \text{on ajoute le nombre retranché} \\ x+7 & = & 3\underbrace{-(+7)+7}_{=0} & \text{définition de l'opposé} \\ x+7 & = & 3 & \text{calcul : } -(+7)+7=0 \\ x+3+4 & = & 3 & \text{décomposition de 7 en utilisant 3} \\ x+4 & = & 0 & \text{on se ramène à l'opposé d'un nombre} \\ x & = & -4 & \text{définition de l'opposé de 4} \\ x & = & 3+(-7) & 3+(-7)=-4 \text{ somme de nombres relatifs} \end{array}\right.$$

Passons à présent à la démonstration de la propriété 2.2.

Démonstration. Étant donné les deux nombres relatifs a et b, posons $x = a - b$. Prouvons que l'on peut écrire la relation

$$x = a + (-b) \tag{9}$$

On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a-b \\ x+b & = & a\underbrace{-b+b}_{=0} \\ x+b & = & a \\ x+\underbrace{b+(-b)}_{=0} & = & a+(-b) \\ x & = & a+(-b) \end{array}\right.$$

ce qui prouve bien que $a - b = a + (-b)$ et qui achève cette démonstration. □

Remarque 2.1. Dans la démonstration précédente, à aucun moment nous ne nous sommes servis du signe des nombres a et b, c'est-à-dire que le raisonnement fait reste valable que ces nombres soient positifs ou négatifs.

Il n'est bien entendu pas utile de refaire tous ces calculs pour effectuer la différence de deux nombres relatifs. On applique simplement le résultat de la propriété 2.2 combiné avec la méthode 1.

Exemple 2.4. On a : $(+6) - (+2,5) = (+6) + (-2,5) = (+3,5)$; écriture simplifiée : $6 - 2,5 = 3,5$.

3 Multiplication et division de nombres relatifs

3.1 Multiplication de nombres relatifs

Comme pour l'addition et la soustraction de deux nombres relatifs, lors de calculs une troisième opération apparaît, la multiplication. On rappelle à cette occasion que la multiplication de deux nombres est la généralisation de l'addition, c'est en quelque sorte une manière plus synthétique d'écrire l'addition de plusieurs termes.

Exemple 3.1. La multiplication des nombres 3 et 2,1 est donnée par définition par la relation

$$3 \times 2,1 = \underbrace{2,1 + 2,1 + 2,1}_{3 \text{ fois}} \tag{10}$$

Remarque 3.1. Nous savons depuis longtemps qu'il revient au même de multiplier deux nombres dans n'importe quel ordre, c'est-à-dire que

$$a \times b = b \times a$$

pour tous les nombres a et b positifs. Il faut tout de même remarquer que si le premier nombre de la multiplication est un nombre décimal, il faut faire un petit travail préalable pour pouvoir effectuer ce passage car il est exclu de faire un nombre décimal de copies d'un nombre, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant. Ce résultat sera admis.

Exemple 3.2. La multiplication $2,1 \times 3$ ne peut pas s'écrire comme 2,1 fois le nombre 3. Mais, on a

$$2,1 \times 3 = 3 \times 2,1 = 6,3$$

Passons à présent à la définition de la multiplication de deux nombres relatifs.

Définition 3.1. La multiplication est l'opération qui, à deux nombres relatifs a et b, associe leur produit $a \times b$. Ce produit peut s'écrire également ab s'il n'a y pas d'ambiguïté. Les deux nombres a et b sont les facteurs du produit ab.

Exemple 3.3. On peut écrire le produit de 2 par x comme $2 \times x$ ou encore $2x$; mais on ne peut pas écrire le produit de 2 par 3,1 de la même manière car on pourrait lire $23,1$, ce qui peut porter à confusion : on écrit toujours : $2 \times 3,1$ pour ce produit.

On sait calculer le produit de deux nombres en écriture décimale sans tenir compte des signes, *i.e.* le produit de deux nombres positifs. La règle qui suit est d'un usage très fréquent.

Propriété 3.1. (règle des signes)

1. le produit de deux nombres relatifs de *même signe* est un nombre positif dont la partie numérique est le produit des parties numériques.
2. le produit de deux nombres relatifs de *signes contraires* est un nombre négatif dont la partie numérique est le produit des parties numériques.

Exemple 3.4.

$$\begin{array}{r|r} (+3,2) \times (+100) = 320 & (-4) \times 5 = -20 \\ (-7) \times (-8) = 56 & 3 \times (-1,5) = -4,5 \end{array}$$

Les propriétés suivantes donnent des règles pour effectuer la multiplication de plusieurs (plus de deux) nombres relatifs.

Propriété 3.2. On a

1. Un produit de nombres relatifs ne change pas quand on modifie l'ordre de ses facteurs ;
2. quand on multiplie un nombre relatif par 0, le produit est nul (il vaut 0) ;
3. multiplier un nombre relatif par 1 ne change pas ce nombre ;
4. multiplier un nombre relatif par (-1), c'est prendre son opposé.

Donnons quelques exemples d'application de la propriété 3.2.

Exemple 3.5.

$$3 \times (-2) \times (-5) = (-2) \times (-5) \times 3 = 10 \times 3 = 30 ;$$
$$18 \times (3 + (-3)) = 18 \times 0 = 0 ;$$
$12 \times (-1) = -12$ et (-12) est l'opposé de 12.

Propriété 3.3. On a

1. Lorsqu'on multiplie des nombres relatifs différents de 0 :
   - s'il y a un nombre *pair* de facteurs négatifs, alors le produit est positif.
   - s'il y a un nombre *impair* de facteurs négatifs, alors le produit est négatif. Dans ces deux cas, la partie numérique du produit est le produit des parties numériques de chacun de ses facteurs.
2. Un produit est nul dès qu'un de ses facteurs est nul.

Exemple 3.6.

a) $2 \times 34 \times 5 = 2 \times 5 \times 34 = 10 \times 34 = 340$;

b) $12 \times (-3) \times 0 \times (-4567) = 0$;

c) $4 \times (-5) \times 1 = 4 \times (-5) = -20$;

d) $123 \times (-1) = -123$;

e) $(-2) \times (-3) \times 4 = 2 \times 3 \times 4 = 24$;

f) $(-2) \times (-3) \times (-5) = -(2 \times 3 \times 5) = -30$.

4 Quotient de deux nombres relatifs

4.1 Division de deux nombres relatifs

Nous aurons l'occasion de revenir sur la définition suivante dans la chapitre traitant des nombres en écriture fractionnaire. Dans tout ce paragraphe, les lettres a, b et x désignent des nombres relatifs.

Définition 4.1. Le quotient de a par b (avec $b \neq 0$) est le nombre x qui, multiplié par b donne a. On a donc

$$b \times x = a \tag{11}$$

On le note $a : b$, $a \div b$, a/b et plus généralement

$$\frac{a}{b} \tag{12}$$

Nous avons également besoin de la définition 4.2 suivante par la suite.

Définition 4.2. Dans le quotient $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$, le nombre a est appelé le *numérateur* du quotient de a par b et le nombre b est appelé le *dénominateur* du quotient de a par b.

Remarquons que le dénominateur d'un quotient n'est jamais égal à 0.

Exemple 4.1. le nombre b est distinct de 0.
- Le quotient de a par 1 est a car $1 \times a = a$; on a donc : $\frac{a}{1} = a$;
- le quotient de 0 par b est 0 car $b \times 0 = 0$; on a donc : $\frac{0}{b} = 0$;
- le quotient de 2 par 4 est $0,5$ car $4 \times 0,5 = 2$; on a donc $\frac{2}{4} = 0,5$;
- le quotient de 10 par 2 est 5 car $2 \times 5 = 10$; on a donc $\frac{10}{2} = 5$.

Comme la division est l'opération inverse de la multiplication, il n'est pas étonnant que la règle des signes pour le signe d'un quotient de deux nombres relatifs soit étroitement lié aux signes son numérateur et de son dénominateur, comme pour le produit de nombres relatifs.

Propriété 4.1. (Règle des signes pour les quotients)
a) Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif.
b) Le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est négatif.
Dans les deux cas, la partie numérique du quotient est le quotient de la partie numérique de son numérateur par la partie numérique de son dénominateur.

Exemple 4.2.

$$\frac{-7}{-2} = +\frac{7}{2} = 3,5$$

et

$$\frac{-7}{2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

Remarque 4.1. Nous reviendrons dans le chapitre sur les calculs avec les nombres en écriture fractionnaire sur le fait que l'on peut écrire le signe d'un quotient avec le numérateur, avec le dénominateur ou encore devant le quotient lui même.

4.2 Inverse d'un nombre relatif différent de 0

Définition 4.3. L'inverse du nombre relatif x avec $x \neq 0$ est le quotient de 1 par x ; c'est le nombre qui, multiplié par x donne 1. On le note $\frac{1}{x}$ ou encore x^{-1}.

Remarque 4.2. La notation x^{-1} pour l'inverse d'un nombre relatif différent de 0 sera justifiée dans le chapitre traitant des puissances d'un nombre relatif.

Exemple 4.3. L'inverse de 2 est 0,5 car $2 \times 0,5 = 1$, on a alors $\frac{1}{2} = 0,5$ ou $2^{-1} = 0,5$.

La division est l'opération « inverse » de la multiplication, comme la soustraction est l'opération inverse de l'addition. La propriété 4.2 suivante donne explicitement le lien entre ces deux notions.

Propriété 4.2. Diviser par un nombre relatif différent de 0, c'est multiplier par son inverse. En pratique, on écrit

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \tag{13}$$

Exemple 4.4.

$$\frac{2}{6} = 2 \times \frac{1}{6} \text{ et } \frac{-3}{10} = -3 \times \frac{1}{10}$$