Cours de Troisième.
Calcul littéral

20 Septembre 2004

Table des matières

1 Généralités sur les expressions numériques

1.1 Définition

Définition 1 *Une expression numérique $E(x)$ est un procédé de calcul qui utilise un nombre x (appelé la variable) pour obtenir un nombre $E(x)$.*

Soient les expressions E et F donnée par $E(x) = x + 3$ et $F(x) = 2x^2 - 3x + 5$.
En remplaçant la variable x par une valeur donnée, on obtient une nouvelle valeur pour E et F. Remplaçons x par 2 dans E et par -1 dans F, on obtient alors deux valeurs notées $E(2)$ et $F(-1)$:

$E(2) = 2 + 3$
$E(2) = 5$

$F(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 5$
$F(-1) = 2 \times 1 + 3 + 5$
$F(-1) = 10$

Remarque : *Certaines expressions numériques utilisent plusieurs variables ; elles ne seront pas étudiées ici.*

1.2 Formes développées ou factorisées

Définition 2 *Formes développées, formes factorisées.*
Parmi les expressions numériques, on distingue :
- *celles formées comme une somme de différents termes : on parlera d'une **forme développée** de l'expression ;*
- *celles formées comme un produit de différents facteurs : on parlera d'une **forme factorisée** de l'expression.*

Remarque : *Le terme "somme" est à prendre au sens large, il peut s'agir d'une différence.*
Exemples :

Expressions sous forme développée :
$A(x) = 2x - 5$
$B(y) = x - 2 - 14x + 5$
$C(z) = 3z^2 - 4y + 1$
$D(\alpha) = \alpha^3 + 6\alpha - 4$

Expressions sous forme factorisée :
$E(x) = -5(x + 1)$
$F(y) = 2y(3 - y)$
$G(z) = (4z + 1)(z + \frac{1}{4})$
$H(t) = (2t - 3)^2$

2 Développement d'une expression

2.1 Principe

Définition 3 *Développer,réduire et ordonner.*
1. ***Développer** une expression, c'est l'exprimer sous forme d'une somme (différence) de plusieurs termes.*
2. ***Réduire** une expression consiste à rassembler les termes d'une même puissance de la vaiable.*
3. ***Ordonner** une expression, c'est l'écrire par ordre de puissance décroissante de la variable.*

Afin de développer une expression, puis de la réduire et l'ordonner, on utilisera l'une des deux méthodes suivantes.

2.2 Utilisation de la distributivité

On pourra utiliser l'une des formules suivantes (la première date de la cinquième, la seconde de quatrième) où a, b, c, d et k sont des nombres relatifs :

$$k(a+b) = ka + kb$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Ici encore, ces formules sont à prendre au sens large, c'est à dire qu'une somme peut très bien cacher une différence. On pensera par exemple qu'écrire "$(2x-3)$", sous-entend écrire "$(2x+(-3))$".

Quelques exemples, les expressions A et B sont des applications directes des formules de distributivité, les autres sont des applications de ces mêmes formules avec un mélange de signes "+" et "−" :

$A(x) = -2(3x+1)$
$A(x) = -2 \times (3x) + (-2) \times 1$
$A(x) = -6x - 2$

$B(x) = (2x+3)(3x+2)$
$B(x) = 2x \times 3x + 2x \times 2 + 3 \times 3x + 3 \times 2$
$B(x) = 6x^2 + 4x + 9x + 6$
$B(x) = 6x^2 + 13x + 6$

$C(x) = 4(3x-2)$
$C(x) = 4 \times 3x - 4 \times 2$
$C(x) = 12x - 8$

$D(x) = (2-5x)(x-3)$
$D(x) = 2 \times x + 2 \times (-3) + (-5x) \times x + (-5x) \times (-3)$
$D(x) = 2x - 6 - 5x^2 + 15$
$D(x) = -5x^2 + 2x - 9$

$E(x) = (x+3)(x-2)$
$E(x) = x^2 - 2x + 3x - 6$
$E(x) = x^2 + x - 6$

$F(x) = (-2x+3)(x-1)$
$F(x) = -2x^2 + 2x + 3x - 3$
$F(x) = -2x^2 + 5x - 3$

2.3 Utilisation des identités remarquables

On pourra utiliser l'une des formules suivantes où a et b sont des nombres relatifs :

Identités remarquables :
$(a+b)^2 = (a)^2 + 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$
$(a-b)^2 = (a)^2 - 2 \times (a) \times (b) + (b)^2$
$(a+b)(a-b) = (a)^2 - (b)^2$

Ces trois formules sont données avec des parenthèses dans le développement, ce qui peut sembler un peu lourd à la lecture. Cependant, leur utilité est bien réelle dès qu'il s'agit de remplacer a et b par des expressions plus complexes que de simples nombres relatifs.

Démonstrations : Il suffit de développer à l'aide de la seconde formule de distributivité en remarquant que pour tous relatifs a et b on a :$ab = ba$. On obtient alors :

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Quelques exemples :

$A(x) = (3x+4)^2$
$A(x) = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 4 + (4)^2$
$A(x) = 9x^2 + 24x + 16$

$B(x) = (2x-3)^2$
$B(x) = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times (3) + (3)^2$
$B(x) = 4x^2 - 12x + 9$

$C(x) = (5x-2)(5x+2)$
$C(x) = (5x)^2 - (2)^2$
$C(x) = 25x^2 - 4$

$D(x) = (-2x-4)^2$
$D(x) = (-2x)^2 - 2 \times (-2x) \times 4 + 4^2$
$D(x) = 4x^2 + 16x + 16$

2.4 Développement d'expressions plus complexes

Certaines expressions sont plus complexes à développer car elles contiennent à la fois des distributivités et des identités remarquables, sous forme d'une somme ou d'une différence. On utilise alors les deux méthodes précédentes conjoitement.

Méthode :
On développe donc chaque membre de la somme à l'aide soit :
– de la distributivité
– des identités remarquables.
On fera particulièrement attention à développer chaque membre entre crochets (ou parenthèses). Ensuite, une fois les crochets calculés et réduits, on prendra garde aux éventuels crochets précédes d'un signe "−". Pour retirer un crochet précédé d'un signe "−", on écrit l'opposé de chaque terme à l'intérieur du crochet.

On aura par exemple :
$-[(3x+2) - (2x-3)] = -[3x + 2 - 2x + 3] = -(x+5) = -x + 5$.
On peut aussi se dire qu'un signe − devant un crochet (parenthèse) signifie "$(-1)\times$".
On aura donc, toujours avec le même exemple :

$$-[(3x+2) - (2x-3)] = -[3x + 2 - 2x + 3] = (-1) \times [x+5] = -x - 5.$$

Exemples d'utilisation de cette méthode :

$A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7)$
$A(x) = [4(2x+5)] + [(x-3)(5x-7)]$ *On place les crochets autour de chaque terme.*
$A(x) = [4 \times (2x) + 4 \times 5] + [x \times (5x) + x \times (-7) + (-3) \times (5x) + (-3) \times (-7)]$
$A(x) = [8x + 20] + \left[5x^2 - 7x - 15x + 21\right]$
$A(x) = [8x + 20] + \left[5x^2 - 22x + 21\right]$ $\rightsquigarrow$ *On réduit chaque crochet.*
$A(x) = 8x + 20 + 5x^2 - 22x + 21$ *On ordonne.*
$A(x) = 5x^2 - 14x + 41$

$B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3)$
$B(x) = \left[(2x-3)^2\right] - [(4x+1)(x-3)]$
$B(x) = \left[(2x)^2 - 2\times(2x)\times(3)+(3)^2\right] - [(4x)\times x+(4x)\times(-3)+1\times x+1\times(-3)]$
$B(x) = \left[4x^2-12x+9\right] - \left[4x^2-12x+x-3\right]$ $\rightsquigarrow$ *Un crochet est précédé d'un signe "−"*
$B(x) = \left[4x^2-12x+9\right] - \left[4x^2-11x-3\right]$ $\rightsquigarrow$ *on applique la méthode.*
$B(x) = 4x^2-12x+9 - 4x^2 + 11x + 3$
$B(x) = -x+12$

$C(x) = (x-3)(x+5) - (-3x+2)(x-5)$
$C(x) = [(x-3)(x+5)] - [(-3x+2)(x-5)]$
$C(x) = \left[x^2+5x-3x-15\right] - \left[-3x^2+15x+2x-10\right]$ $\rightsquigarrow$ *Ici encore.*
$C(x) = \left[x^2+2x-15\right] - \left[-3x^2+17x-10\right]$
$C(x) = x^2+2x-15 + 3x^2 - 17x + 10$
$C(x) = 4x^2-15x-5$

3 Factorisation d'une expression

Définition 4 ***Factoriser***, *c'est écrire une somme (différence) sous forme d'un produit.*

On peut factoriser une expression avec deux techniques différentes.

3.1 Utilisation d'un facteur commun

Cette technique consiste à mettre en évidence un facteur commun dans la somme (différence). On décompose en produit chaque terme de façon à trouver un facteur en commun *le plus grand possible.*
On utilise alors la première relation de distributivité à l'envers : $k\,a + k\,b = k\,(a+b)$, en prenant soin de noter que k est une expression numérique et pas nécessairement un nombre.

Exemples :

$A(x) = 15x-12$
$A(x) = 3\times 5x - 3\times 4$ $\rightsquigarrow$ *Le nombre 3 est le facteur commun.*
$A(x) = 3\,(5x-4)$

$B(x) = 5x-5$
$B(x) = 5\times x - 5\times 1$ $\rightsquigarrow$ *Le nombre 5 est le facteur commun : ne pas oublier le "×1" !*
$B(x) = 5\,(x-1)$

$C(x) = 6x^2+10x$
$C(x) = 2x\times 3x + 2x\times 5$ $\rightsquigarrow$ *$2x$ est ici le facteur commun.*
$C(x) = 2x\,(3x+5)$

$D(x) = (3x+2)(4x-1) + (3x+2)(-6x+8)$
$D(x) = (3x+2)\times(4x-1) + (3x+2)\times(-6x+8)$ $\rightsquigarrow$ *c'est ici $(3x+2)$.*
$D(x) = (3x+2)\,[(4x-1)+(-6x+8)]$
$D(x) = (3x+2)\,[4x-1-6x+8]$
$D(x) = (3x+2)\,(-2x+7)$

$E(x) = (3x-4)^2 - (2x-5)(3x-4)$
$E(x) = (3x-4)\times(3x-4) + (2x-5)\times(3x-4)$ $\rightsquigarrow$ *$(3x-4)$ est le facteur commun.*
$E(x) = (3x-4)\,[(3x-4) - (2x-5)]$ $\rightsquigarrow$ *Attention aux changements de signes.*
$E(x) = (3x-4)\,[3x-4 - 2x + 5]$
$E(x) = (3x-4)\,(x+1)$

$F(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$
$F(x) = (2x-3)\,(2x-3) - (2x-3)\times 1$ $\rightsquigarrow$ *Mettre en évidence le "×1".*
$F(x) = (2x-3)\,[(2x-3)-1]$
$F(x) = (2x-3)\,(2x-4)$

3.2 Utilisation des identités remarquables

Méthode :
D'abord on cherche à factoriser l'expression par l'une des méthodes précédentes, puis on procède comme suit :
On regarde combien l'expression comporte de termes.

1. Si il y en a trois, ils peuvent être de la forme :
   $a^2+2ab+b^2$, c'est à dire $(a+b)^2$
   ou $a^2-2ab+b^2$, c'est à dire $(a-b)^2$.
   Pour vérifier cela, on regarde si l'on trouve un premier terme au carré (ex :a^2), puis un deuxième terme au carré (ex :b^2). Puis on vérifie que le terme restant est $2ab$ ou $-2ab$. On écrit le résultat : $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$.
2. S'il y a deux termes, ils peuvent être de la forme : a^2-b^2, c'est à dire $(a+b)(a-b)$. Pour cela, on vérifie que l'expression est bien une différence de carrés.

D'où les exemples de factorisations suivants :

$A(x) = 9x^2+42x+49$
$A(x) = (3x)^2 + 2\times(3x)\times(7)+(7)^2$ *De la forme $(a+b)^2$.*
$A(x) = (3x+7)^2$

$B(x) = 25x^2 - 60x + 36$
$B(x) = (5x)^2 - 2 \times (5x) \times (6) + (6)^2$ *De la forme* $(a-b)^2$.
$B(x) = (5x - 6)^2$

$C(x) = 9x^2 - 64$
$C(x) = (3x)^2 - (8)^2$ *De la forme* $(a-b)(a+b)$.
$C(x) = (3x - 8)(3x + 8)$

3.3 Factorisation d'expressions plus complexes

Il arrive pourtant qu'un facteur commun ne saute pas aux yeux, tout comme une identité remarquable. Dans ce cas, on examine chaque terme de la somme et on essaye de le factoriser.

$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (4x^2 - 20x + 25)$
$A(x) = (2x-5)(7+3x) - ((2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2)$
$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (2x-5)^2$
$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (2x-5)(2x-5)$
$A(x) = (2x-5)[(7+3x) - (2x-5)]$
$A(x) = (2x-5)[7+3x-2x+5]$
$A(x) = (2x-5)(x+12)$

$B(x) = (x-3)(3x+5) + (9x^2 + 30x + 25)$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + ((3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2)$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + (3x+5)^2$
$B(x) = (x-3)(3x+5) + (3x+5)(3x+5)$
$B(x) = (3x+5)[(x-3) + (3x+5)]$
$B(x) = (3x+5)[x-3+3x+5]$
$B(x) = (3x+5)(4x+2)$
$B(x) = 2 \times (3x+5)(2x+1)$

$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (4x^2 - 9)$
$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - ((2x)^2 - 3^2)$
$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (2x+3)(2x-3)$
$C(x) = (2x+3)[3(x+3) - (2x-3)]$
$C(x) = (2x+3)[3x+9-2x+3]$
$C(x) = (2x+3)(x+12)$

$D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2$ $\rightsquigarrow$ *Type* $a^2 - b^2$
$D(x) = [(2x-1) + (3-5x)]\,[(2x-1) - (3-5x)]$
$D(x) = [2x-1+3-5x]\,[2x-1-3+5x]$
$D(x) = (-3x+2)(7x-4)$