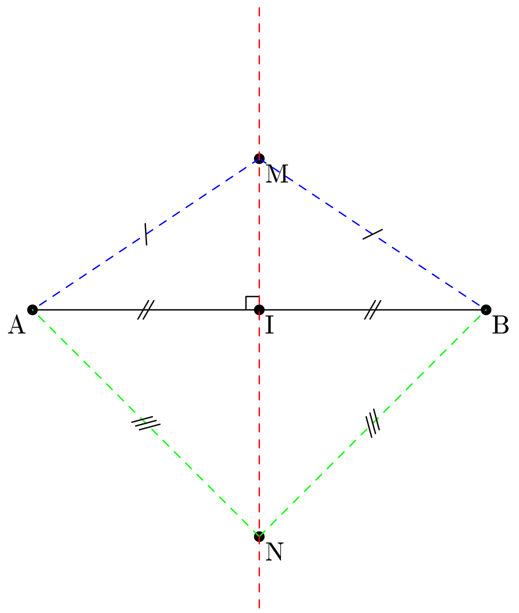
Triangle rectangle et cercle circonscrit.

Septembre 2004

Table des matières

1 Rappels

1.1 Médiatrice d'un segment



M et N appartiennent tous les deux à la médiatrice de $[AB]$, ils sont ***équidistants*** *de A et B.*

Définition 1 *La médiatrice (d) d'un segment $[AB]$ est la droite qui coupe $[AB]$ perpendiculairement en son milieu I.*

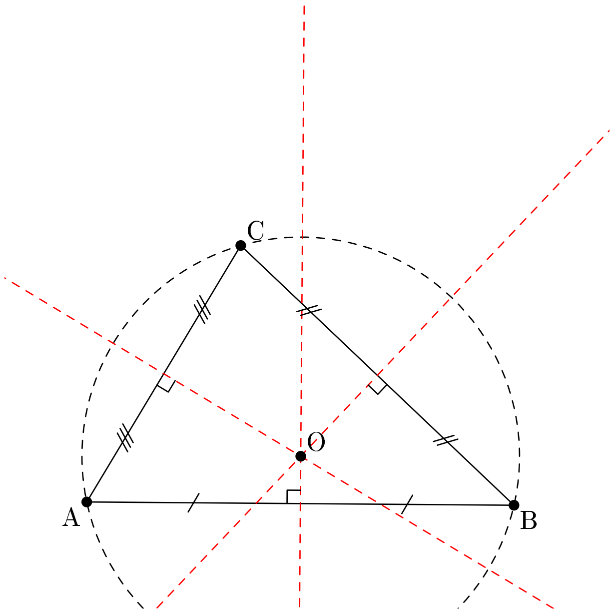
La médiatrice d'un segment peut se construire de deux façons :

1. A l'equerre et à la règle graduée.
2. Au compas et à la règle non graduée.

Propriété 1 *Si un point M appartient à la médiatrice de $[AB]$, il est équidistant des extrêmités A et B du segment $[AB]$.*

Propriété 2 ***(Réciproque)*** *Si un point M est équidistant des extrêmités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de celui-ci.*

1.2 Cercle circonscrit à un triangle



Le cercle circonscrit au triangle ABC et son centre O point de coucours des médiatrices.

Propriété 3 *Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes. Le point d'intersection de celles-ci est le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est équidistant des trois sommets du triangle.*

Démonstration : Soit M un point appartenant aux médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ (noter qu'il existe un tel point, sinon le triangle ABC serait plat). M vérifie les deux relations : $MA = MB$ et $MA = MC$. Par conséquent, $MB = MC$, ce qui prouve que M appartient à la médiatrice de $[BC]$. M est donc le point d'intersection des trois médiatrices et est à égale distance des sommets A,B et C du triangle, c'est donc le centre du cercle circonscrit à celui-ci.

Remarque : En pratique, pour trouver le centre du cercle circonscrit à un triangle quelconque, on ne trace que deux des trois médiatrices (puisqu'on sait qu'elles sont concourantes).

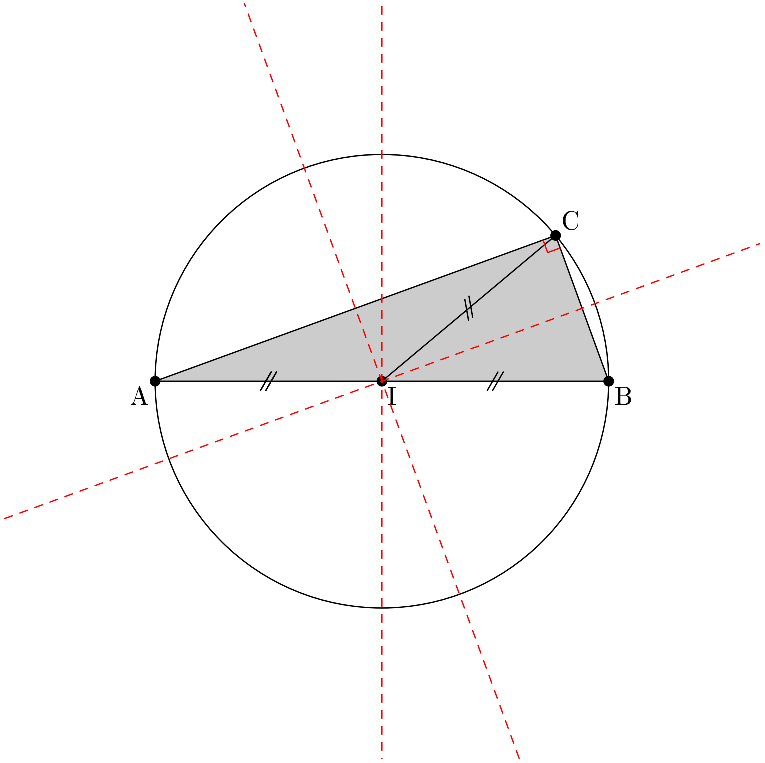
Exercices d'application :

1. Deux cercles $\mathcal{C}(O,R)$ et $\mathcal{C}'(O,R')$ sont sécants en deux points A et B. Prouver que (OO') est la médiatrice de $[AB]$.
2. Tracer un cercle C à l'aide d'un verre ou d'une pièce de monnaie. Expliquer la construction du centre O du cercle C.

2 Triangle rectangle et cercle circonscrit

Définition 2 *Dans un triangle rectangle, l'****hypoténuse*** *est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté d'un triangle rectangle.*

Théorème 1 *Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.*



Cercle circonscrit à un triangle rectangle centré en I, milieu de l'hypoténuse.

Démonstration :
Soit ABC un triangle rectangle en C. I est le milieu de $[AB]$. Soit M le symétrique de C par rapport à I. Par symétrie, I est le milieu des diagonales du quadrilatère $ACBM$. Il s'agit donc d'un parallélogramme. Comme il a un angle droit, $ACBM$ est un rectangle. On en déduit que les diagonales $[AB]$ et $[CM]$ sont de même longueur et que les segments, $[IA]$, $[IB]$, $[IM]$ et $[IN]$ sont de même longueur. Il existe donc un cercle de centre I et de rayon $[IA]$ qui passe par les points A, B, M et C. Le cercle circonscrit à ACB a donc pour centre I et pour diamètre $[AB]$.

Remarque :
Le théorème, attribué à Thalès, est utilisé pour calculer des distances, pour tester si des points sont cocycliques, c'est à dire si plusieurs points se trouvent ou non sur un même cercle.

Conséquences :
- *Si un triangle est rectangle, son hypoténuse est le diamètre de son cercle circonscrit. Le rayon du cercle circonscrit est donc égal à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.*
- *La médiane issue de l'angle droit du triangle rectangle est égale à la moitié de l'hypoténuse.*
- *Dans un triangle rectangle, les médiatrices des trois côtés se coupent au milieu del'hypoténuse*

Théorème 2 ***(Réciproque)*** *Si un triangle est inscrit dans un (demi) cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle.*

Remarque pratique :
Ce théorème permet de montrer qu'un triangle est rectangle.
On ne doit pas écrire "Comme le triangle ABC est inscrit dans le demi cercle de diamètre l'hypoténuse $[BC]$ alors..." puisque, dans les hypothèses , nous n'avons pas encore établi que ABC est un triangle rectangle. Il faut écrire : "Comme le triangle ABC est inscrit dans le demi cercle de diamètre $[BC]$, alors ABC est rectangle en A."
Conséquence : *Si le milieu d'un côté d'un triangle est équidistant des trois sommets, alors ce triangle est rectangle.*
Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration du théorème précédent à l'envers.