Table des matières

Chapitre III: Les fractions

1 Simplification de fractions

Propriété : Le quotient de deux nombres ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise le numérateur ET le dénominateur par un même nombre non nul.On peut ainsi écrire que pour tous nombres a,b et c avec b et c non nuls :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

Exemples : On obtient très facilement les deux exemples suivants de simplification.

1. $\dfrac{10}{8} = \dfrac{5 \times \cancel{2}}{4 \times \cancel{2}} = \dfrac{5}{4}$

2. $\dfrac{21}{84} = \dfrac{3 \times \cancel{7}}{12 \times \cancel{7}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} = \dfrac{1}{4}$

2 Additions et soustractions

2.1 Si les dénominateurs sont égaux

Propriété : Si les dénominateurs sont identiques, on n'ajoute (on soustrait) que les numérateurs.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ et } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \text{ où } c \neq 0$$

Exemple : $\dfrac{5}{6} + \dfrac{-7}{6} = \dfrac{5+(-7)}{6} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{1}{3}$

2.2 Si les dénominateurs sont différents

Propriété : Si les dénominateurs sont différents, on transforme une des fractions, voire même les deux de façon à les mettre au même dénominateur, qu'on appellera alors le dénominateur commun.On se ramène alors à deux fractions de dénominateurs égaux.

Exemples :

1. $\dfrac{5}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{12} + \dfrac{8}{12} = \dfrac{15+8}{12} = \dfrac{23}{12}$ On a cherché pour dénominateur commun un nombre qui soit le plus petit possible, et qui soit à la fois dans la table de 4 et dans celle de 3 : c'est 12 qui convient. Notez qu'on peut l'obtenir en faisant 4×3, mais ce n'est malheureusement pas une méthode "générale" et bonne comme nous le prouve l'exemple suivant.

2. $\frac{-2}{6}+\frac{1}{4}=\frac{-4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{-4+3}{12}=\frac{-1}{12}$ Ici, on a cherché pour dénominateur commun un nombre qui soit le plus petit possible, et qui soit à la fois dans la table de 6 et dans celle de 4 : c'est 12 qui convient. Notez que cette fois-ci, la "pseudo-méthode" 6×4 ne donnait pas le meilleur résultat puisqu'on obtient deux fractions sur 24 (elles sont donc plus lourdes à gérer et il faudrait alors simplifier le résultat obtenu).

3 Multiplications

Propriété : Dans tous les cas, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d} \text{ où } c\neq 0 \text{ et } d\neq 0$$

Remarque importante : En général, on essayera de simplifier les fractions AVANT de calculer à l'aide de cette formule. L'intérêt : il y a moins de calculs à faire et les fractions obtenues sont alors simplifiées.

Exemples :

1. $\frac{-3}{5}\times\frac{7}{-2}=\frac{-3\times 7}{5\times(-2)}=\frac{-21}{-10}=\frac{21}{10}$
   On a appliqué la formule à la lettre. Malheureusement, ce n'est pas toujours la meilleure méthode comme nous le montre ce second exemple!
2. $\frac{21}{84}\times\frac{12}{168}=\frac{21\times 12}{84\times 168}$
   Avons-nous envie d'appliquer la formule à la lettre? Clairement pas.Les calculs,sans être complexes ne donnent pas envie de s'y mettre. On décompose alors chaque nombre aux numérateurs et aux dénominateurs et en simplifiant ensuite ce qui donne :
   $\frac{21}{84}\times\frac{12}{168}=\frac{21\times 12}{84\times 168}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{7}\times 1\times\cancel{3}\times\cancel{7}\times 5}{\cancel{3}\times\cancel{7}\times 4\times\cancel{3}\times\cancel{7}\times 6}=\frac{1\times 5}{4\times 6}=\frac{5}{24}$

4 Inverse d'une fraction

a et b sont deux relatifs non nuls. L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ où $b\neq 0$ est la fraction $\frac{b}{a}$ où $a\neq 0$.En effet, nous savons qu'un nombre multiplié par son inverse donne toujours 1. On peut le vérifier ici : $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=1$

Exemple : L'inverse de la fraction $\frac{5}{6}$ est la fraction $\frac{6}{5}$.

5 Divisions

Propriété : Diviser par un nombre (non nul!),c'est le multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b} \text{ où } b\neq 0, c\neq 0 \text{ et } d\neq 0$$

Exemples :

1. $\frac{-3}{5}\div\frac{-2}{7}=\frac{-3}{5}\times\frac{7}{-2}=\frac{-3\times 7}{5\times(-2)}=\frac{-21}{-10}=\frac{21}{10}$

2. $\frac{21}{84} \div \frac{168}{12} = \frac{21}{84} \times \frac{12}{168} = \frac{21 \times 12}{84 \times 168} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{7} \times 1 \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{7} \times 6} = \frac{1 \times 5}{4 \times 6} = \frac{5}{24}$ Comme cela a été vu dans l'exemple sur la multiplication.

6 Comparaison

Propriétés :

1. Deux fractions sont égales si les produits en croix sont égaux.
2. Une fraction est plus grande (petite) que 1 si le numérateur est plus grand (petit) que le dénominateur.
3. Pour comparer des fractions on peut réduire au même dénominateur positif, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Exemples :

1. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ car les produits en croix 2×15 et 3×10 sont égaux à 30.
2. On a :$\frac{2}{3} < 1$ car le numérateur est plus petit que le dénominateur.

   De même,$\frac{5}{2} > 1$ car le dénominateur est plus petit que le numérateur
3. Supposons que nous voulions comparer $A = \frac{2}{-3}$ et $B = \frac{-7}{11}$.

   On commence déjà par les mettre sous un dénominateur positif,ce qui est déjà fait pour B ;il ne reste plus qu'à transformer A, on obtient : $A = \frac{-2}{3}$.

   On les place alors sous un dénominateur commun, on trouve aisément :$A = \frac{-22}{33}$ et $B = \frac{-21}{33}$.
   Ainsi,on a $A < B$ car $-22 < -21$.

7 Fraction d'une quantité

Propriété : Prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la fraction.

Exemples :

1. Les $\frac{4}{5}$ d'un bidon de 10L d'huile font $\frac{4}{5} \times 10 = 8$L.
2. Les$\frac{3}{4}$ du tiers d'un bidon d'huile font $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ du bidon.
3. Les $\frac{9}{4}$d'une heure (60mn) font $\frac{9}{4} \times 60 = 135$mn soit encore 1h et quart.