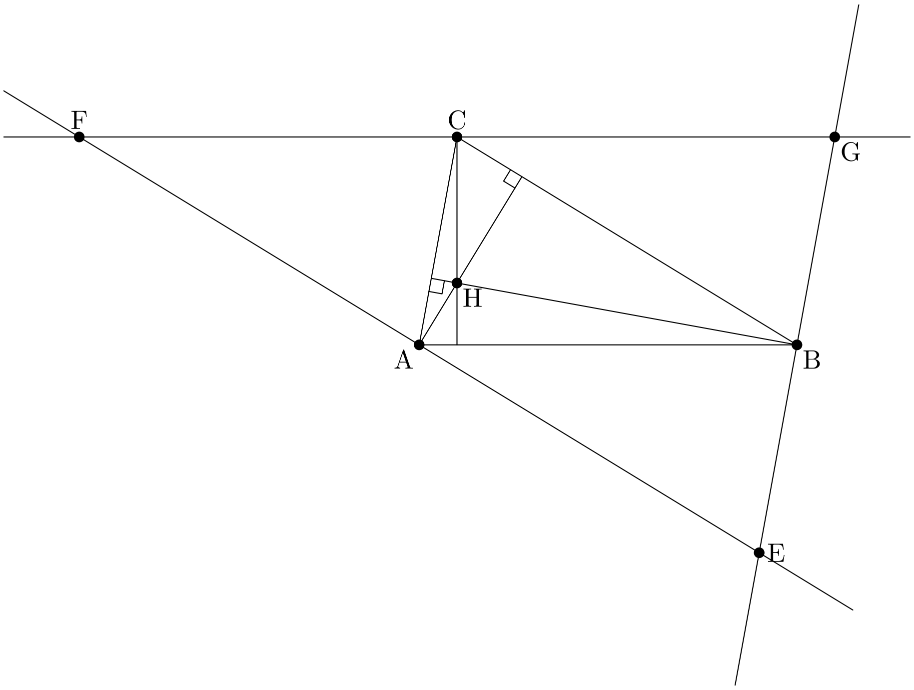
Médiatrices

1. Que sais-tu sur les 3 médiatrices d'un triangle ?
2. Quel objet mathématique ces 3 médiatrices permettent-elles de construire ?

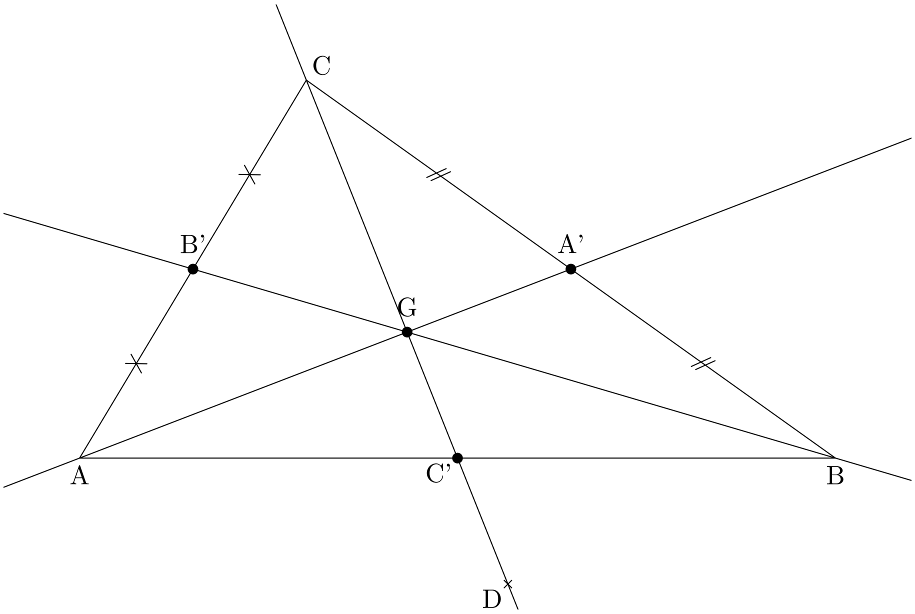
Hauteurs



Soit ABC un triangle quelconque et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC. Les droites (EF), (FG) et (GE) sont parallèles respectivement à (BC), (BA) et (AC).

1. Combien peux-tu citer de hauteurs dans le triangle ABC ?
2. (a) Quelle est la nature des quadrilatères $EACB$ et $AFCB$? Justifie.
   (b) Déduis-en alors la position particulière du point A sur le segment $[EF]$.
   (c) Que peux-tu dire de la droite (AH) et du segment $[EF]$? Justifie.
3. Que peux-tu dire de la droite (BH) et du segment $[EG]$? Justifie.
4. Que peux-tu dire de la droite (CH) et du segment $[FG]$? Justifie.
5. Que représente alors la droite (CH) pour le triangle ABC ? Justifie.
6. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

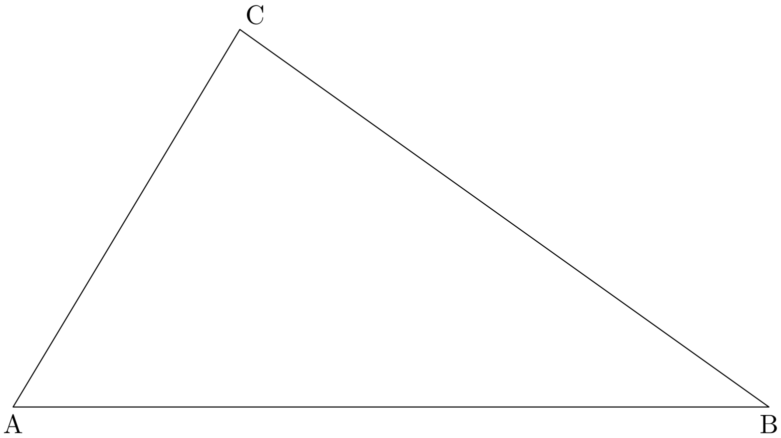
Médianes



Soit ABC un triangle quelconque et A', B' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. Soit G le point d'intersection des droites (AA') et (BB') et D le symétrique de C par rapport à G. Soit C' le point d'intersection des droites (CG) et (AB).

1. Dans un triangle, on appelle **médiane** *une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.*
   Combien peux-tu citer de médianes dans le triangle ABC ? Justifie.
2. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $AGBD$? Justifie.
   (b) Déduis-en alors la position du point C' sur le segment $[AB]$.
3. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

Bissectrices



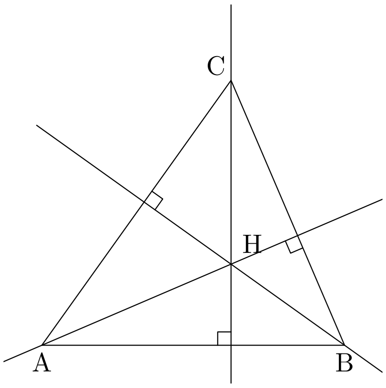
Soit ABC un triangle quelconque.

1. Constuis les bissectrices des ansgles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$. Que remarques-tu ?[a]
2. Soit I le point d'intersection des bissectrices. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par I coupe la droite (AB) en P.
   Trace le cercle de centre I et de rayon IP. Que remarques-tu ?

[a] On admettra ce résultat dans le cahier de leçons.

Droites remarquables du triangle

Les hauteurs

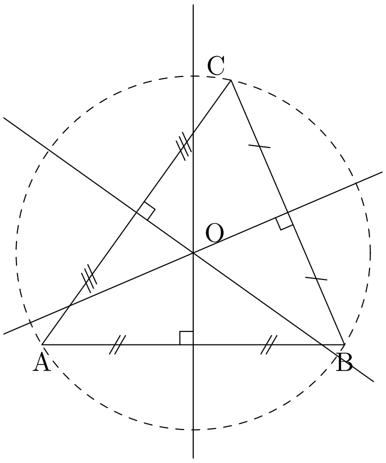


Définition 1 *Dans un triangle, une* hauteur *est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.*

<u>Notation</u> : Dans le triangle ABC, si la hauteur passe par le sommet A on dit alors *hauteur issue de A.*

Théorème 1 *Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point H appelé* orthocentre *du triangle.*

Les médiatrices



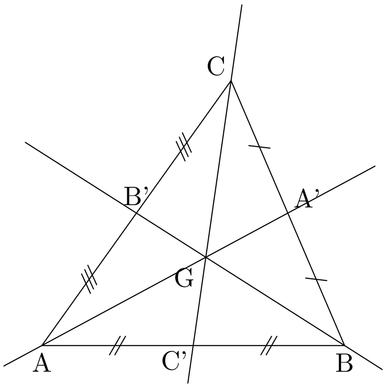
Définition 2 *La* médiatrice d'un segment *est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Les médiatrices dans un triangle sont donc les médiatrices des côtés de ce triangle.*

Propriété 1 <u>*Si*</u> *M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$* <u>*alors*</u> *M est équidistant de A et de B c'est à dire $MA = MB$.*

Propriété 2 <u>*Si*</u> *M est équidistant de A et de B* <u>*alors*</u> *M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.*

Théorème 2 *Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes en un point O appelé* centre du cercle circonscrit *au triangle.*

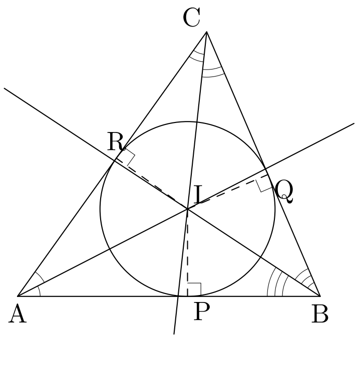
Les médianes



Définition 3 *Dans un triangle, une* médiane *est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.*

Théorème 3 *Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point G appelé* centre de gravité *du triangle.*
De plus, on a $AG = \dfrac{2}{3}AA'$, $BG = \dfrac{2}{3}BB'$, $CG = \dfrac{2}{3}CC'$

Les bissectrices.



Définition 4 *La* bissectrice d'un angle *est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure. C'est également l'axe de symétrie de cet angle.*

Théorème 4 *Dans un triangle, les bissectrices sont concourantes en un point I appelé* centre du cercle inscrit *au triangle.*
De plus, $IP = IQ = IR$

Exercice 1 : *Les 3 questions sont indépendantes.*

1. (a) Construis un triangle ECG tel que $EC = 7\,cm$, $CG = 6\,cm$, et $GE = 3\,cm$.
   (b) Construis la hauteur (d) issue de G dans le triangle ECG.
   (c) Construis la hauteur (d') issue de E dans le triangle ECG.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
2. (a) Construis un triangle ERL tel que $ER = 6\,cm$, $RL = 5\,cm$ et $\widehat{ERL} = 60°$.
   (b) Construis la médiane (d) issue de R dans le triangle ERL.
   (c) Construis la médiane (d') issue de L dans le triangle ERL.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
3. (a) Contruis un triangle SER tel que $SE = 6\,cm$, $\widehat{RSE} = 50°$, $\widehat{RES} = 60°$.
   (b) Construis son cercle inscrit

Exercice 2 : Soit ABC un triangle tel que $AB = 10\,cm$, $BC = 11\,cm$ et $CA = 12\,cm$.

1. Construis l'orthocentre H du triangle ABC.
2. (a) Soit I le point d'intersection des droites (AH) et (BC) ; J le point d'intersection des droites (BH) et (CA) ; K le point d'intersection des droites (CH) et (AB).
   Construis le centre du cercle inscrit au triangle IJK.
   (b) Que constate-t-on ?

Exercice 3 :

1. Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construis le symétrique L du point A par rapport au point M.
2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifie la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire qu point J ? Pourquoi ?

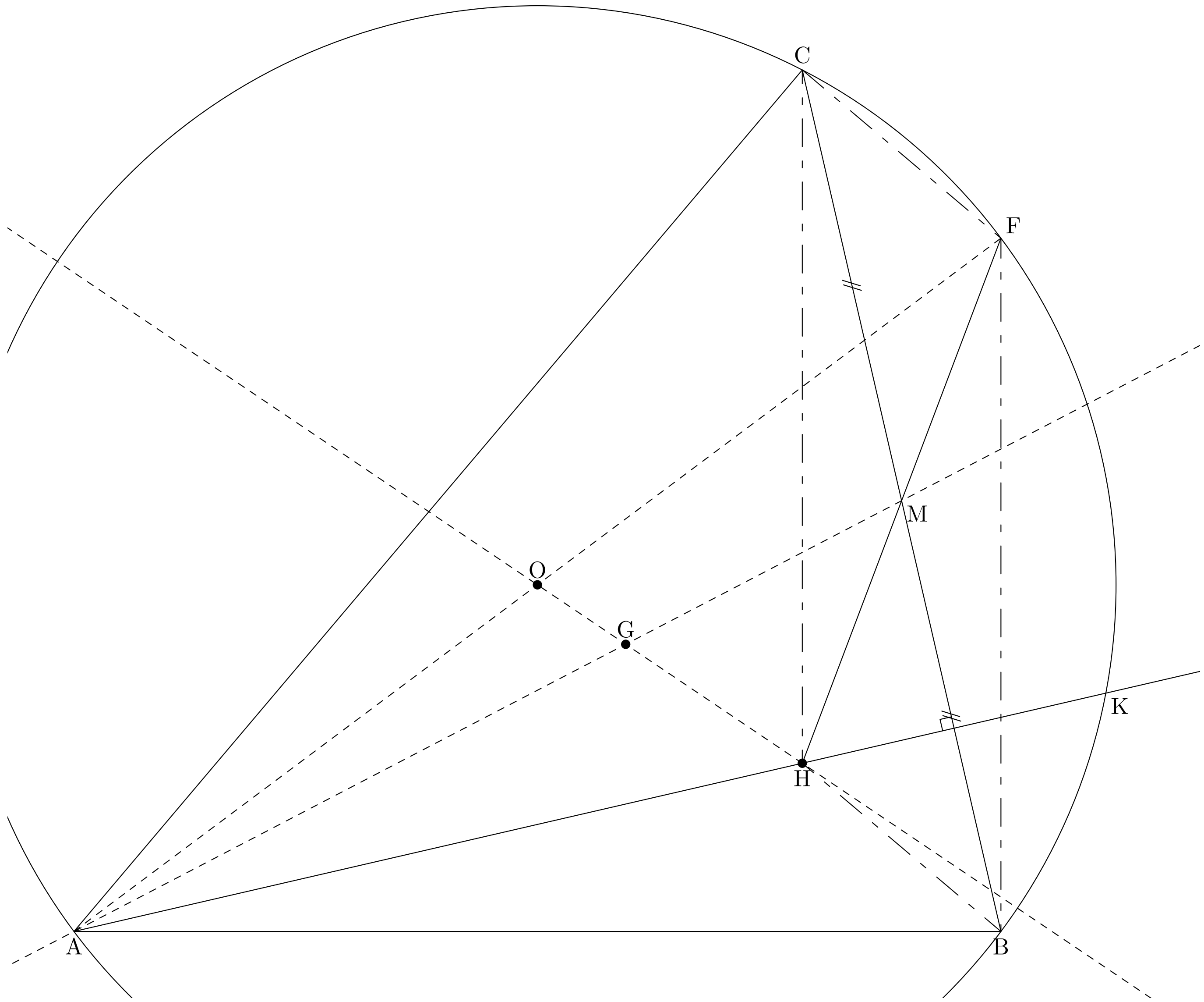
Exercice 4 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

1. (a) Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifie.
   (b) Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifie.
2. Démontre que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $EDFC$? Justifie.
   (b) Démontre que la droite (DC) est à la fois une médiane du triangle ABC et du triangle EFD.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontre que G est aussi le centre de gravité du triangle EFD.

Droite D'EULER[1]



Construction

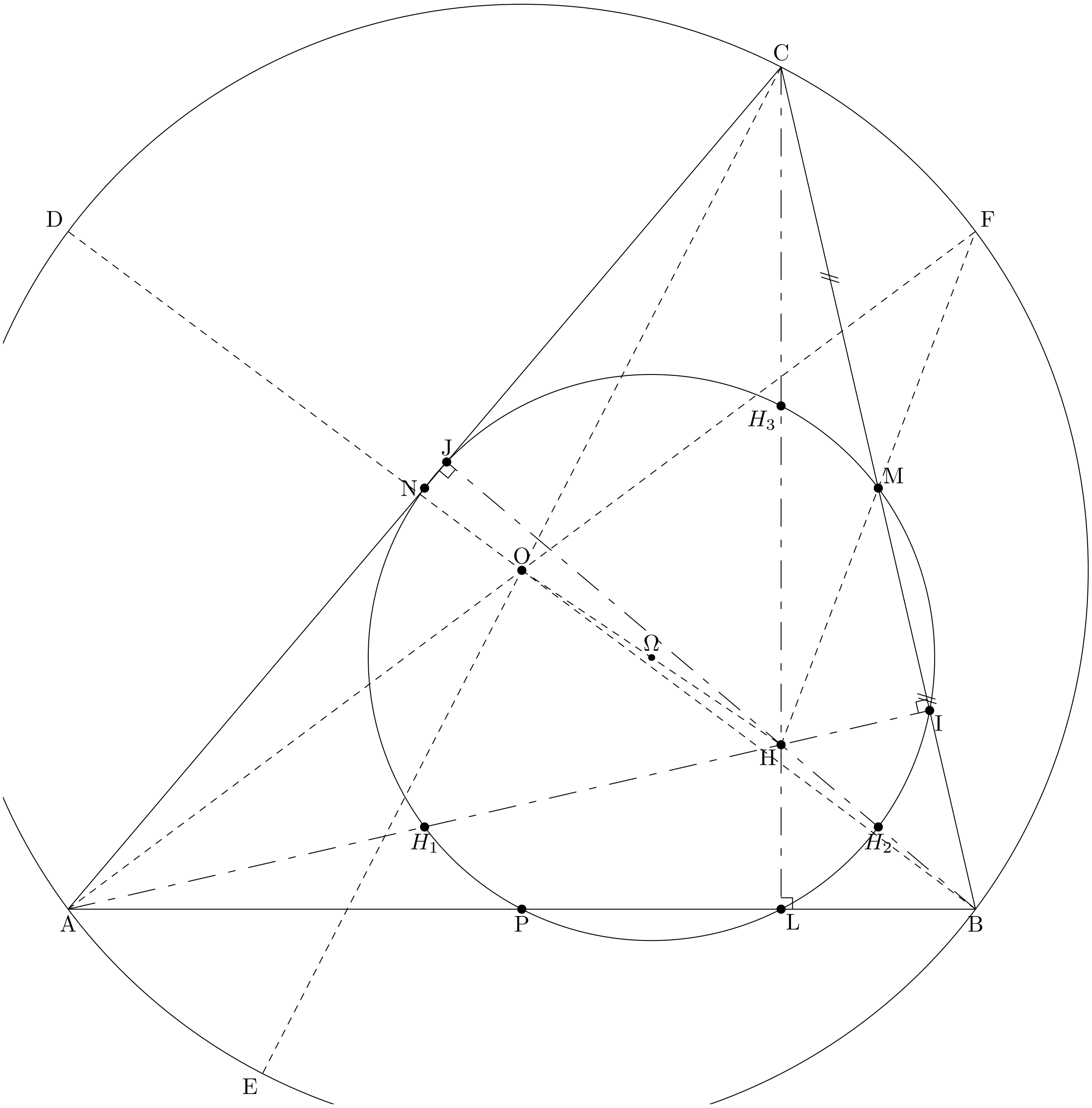
1. Soit ABC un triangle supposé non équilatéral.
2. Soit O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3. Soit F le point diamètralement opposé à A.
4. Soit K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle $(\mathcal{C})$
5. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
6. Soit H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
7. Soit G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

Démonstration

1. Montre que les triangles AFK et AFC sont rectangles.
2. (a) Montre que la droite (OM) est la médiatrice du segment $[BC]$.
   (b) Montre que les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
3. (a) Montre que M est le milieu du segment $[HF]$.
   (b) Montre que le quadrilatère $BHCF$ est un parallélogramme.
4. (a) Montre que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
   (b) Montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. (a) Montre que G est le centre de gravité du triangle AHF.
   (b) Quelle est la position remarquable de G sur le segment $[OH]$?
   (c) Montre que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

[1]Leonhard EULER, Mathématicien suisse (1707-1783)

Cercle D'Euler ou cercle des neuf points



Construction

1. On reprend la construction précédente.
2. On appelle Ω le milieu du segment $[OH]$; N et P les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$; D et E le symétriques respectifs de B et C par rapport à O ; I, J, L les points d'intersection respectifs entres la hauteur issue de A et la droite (BC), la hauteur issue de B et la droite (AC), la hauteur issue de C et la droite (AB) ; H_1, H_2, H_3 les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

Démonstration

Démontre que les points M, N, P, I, J, L, H_1, H_2 et H_3 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Indication : *On cherchera par expérimentation quel pourrait être le centre de ce cercle et on déterminera ensuite la valeur du rayon à l'aide d'un des points.*
Restera ensuite à prouver que tous les autres points donnent la même valeur du rayon.
Chose « simple » pour les points M, N, P, H_1, H_2, H_3. Pour le point I, on pourra considérer la parallèle à la droite (AH) passant par Ω et démontrer qu'elle coupe le segment $[IM]$ en son milieu.