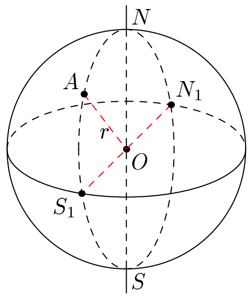
Géométrie dans l'espace[1] 3eme

1 Sphère et boule

Définition 1 *Soit O est un point de l'espace et r est un nombre positif donné.*

- *La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O égale à r.*
- *La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à r.*
- *Un **grand cercle** d'une sphère de centre O et de rayon r est un cercle de centre O et de rayon r.*

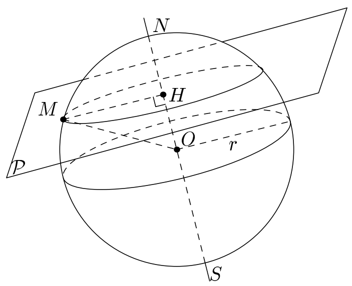
Exemples



- la sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$. Ici, le point A appartient à la sphère de centre O et de rayon r mais le point O non.
- la boule de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$. Ici, les points A et O appartiennent à la boule de centre O et de rayon r.
- Le cercle de centre O et de rayon OA est un grand cercle ($OA = r$).

Propriété 1 *Lorsqu'elle existe, la section d'une sphère par un plan est un cercle.*

Exemple



Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère de centre O et de rayon r : la section obtenue est un cercle de centre H et de rayon MH que l'on calcule à l'aide du théorème de Pythagore.

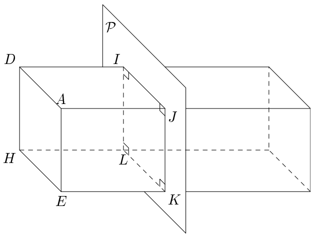
Propriété 2 *Soit r un nombre positif.*

- *L'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$.*
- *Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

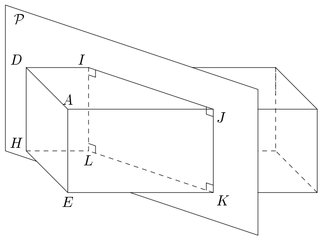
[1] Avec des figures de Raphaël Nivelle.

2 Sections de différents solides

Le parallélépipède rectangle

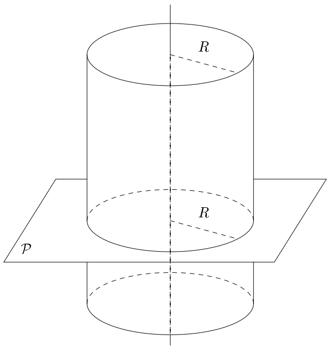


$\mathcal{P}$ est parallèle à la face $ADHE$.

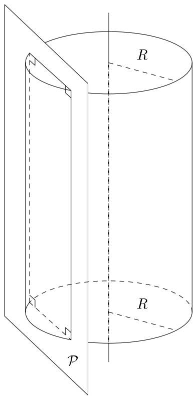


$\mathcal{P}$ est parallèle à l'arête $[AE]$.

Le cylindre de révolution

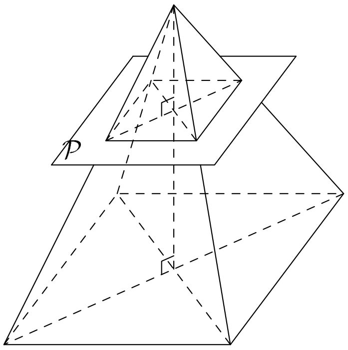


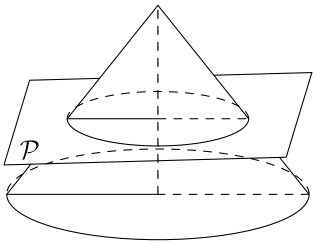
$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution.



$\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe de révolution.

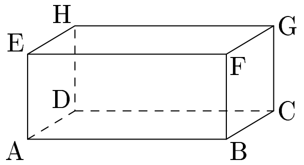
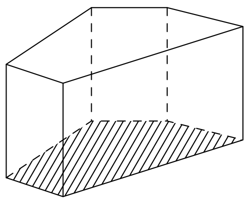
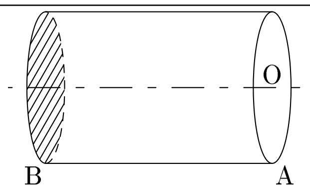
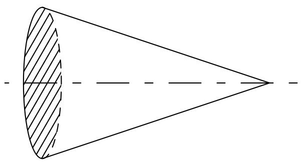
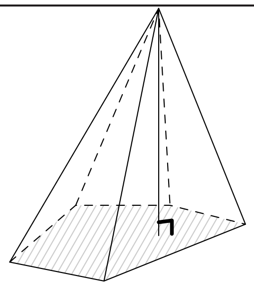
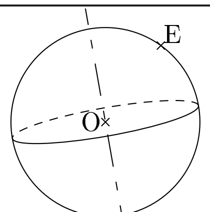
La pyramide et le cône de révolution





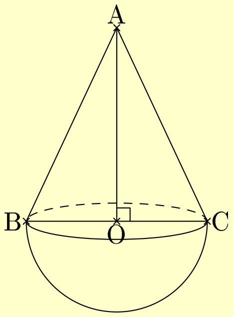
$\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base.

3 Volumes des différents solides usuels

Nom du solide	Représentation	Volume
Parallélépipède rectangle – Solide dont toutes les faces sont des rectangles. Le **cube** en est un cas particulier.		$\mathcal{V} = AB \times AD \times AE$
Prisme – Solide composé de deux *bases* polygonales parallèles et dont toutes *les faces latérales* sont des rectangles. $\mathcal{A}$ est l'aire d'une base et h la hauteur du prisme.		$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$
Cylindre – Solide engendré (c'est-à-dire créé) par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses axes de symétrie ou d'un des ses côtés.		$\mathcal{V} = \pi \times OA^2 \times AB$
Cône – Solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur du cône.		$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
Pyramide – Solide composé d'une *base* polygonale et dont toutes les *faces latérales* sont des triangles qui ont un sommet commun S. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.		$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$
Sphère – La sphère de centre O et de rayon r est composée de tous les points de l'espace situés à la même distance r du point O.		$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times OE^3$

4 Exercices

Exercice 1



L'unité est le centimètre.
Un jouet à la forme d'une demi-boule surmontée d'un cône de révolution de sommet A, comme l'indique la figure ci-dessous.
Le segment $[BC]$ est un diamètre de la base du cône ; le point O est le centre de cette base.
On donne : $AB = 7$ et $BC = 6$.

1. Calculer la longueur AO.
2. Calculer le volume, arrondi au cm^3 près, de ce jouet.

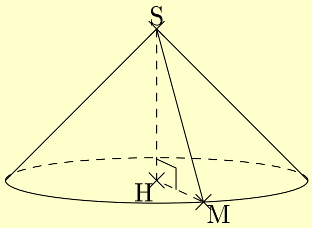
1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle AOB rectangle en O. On obtient $AO = \sqrt{40}\,cm$ ou encore $AO = 2\sqrt{10}\,cm$.
2.

$$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times OB^2 \times OA$$
$$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 2\sqrt{10}$$
$$\mathcal{V}_{\text{cône}} = 6\pi\sqrt{10}\,cm^3$$

$$\mathcal{V}_{\text{demi-boule}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times OB^3$$
$$\mathcal{V}_{\text{demi-boule}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$
$$\mathcal{V}_{\text{demi-boule}} = 18\pi\,cm^3$$

$$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \mathcal{V}_{\text{cône}} + \mathcal{V}_{\text{demi-boule}}$$
$$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = 6\pi\sqrt{10} + 18\pi$$
$$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = 6\pi\left(\sqrt{10} + 3\right)\,cm^3$$
$$\mathcal{V}_{\text{jouet}} \approx 116\,cm^3$$

Exercice 2



L'unité de longueur est le centimètre.
La figure ci-contre représente un cône de révolution de sommet S, et de base le disque de centre H et de rayon $[HM]$. On donne $HS = 8$ et $HM = 6$.
On coupe ensuite le cône par un plan parallèle à sa base, et passant par le point H' du segment $[SH]$ tel que $HH' = 2$.
Calculer le volume du cône de révolution obtenu, arrondi au cm^3.

Indication : Il s'agit d'une réduction de coefficient $\dfrac{SH'}{SH}$.