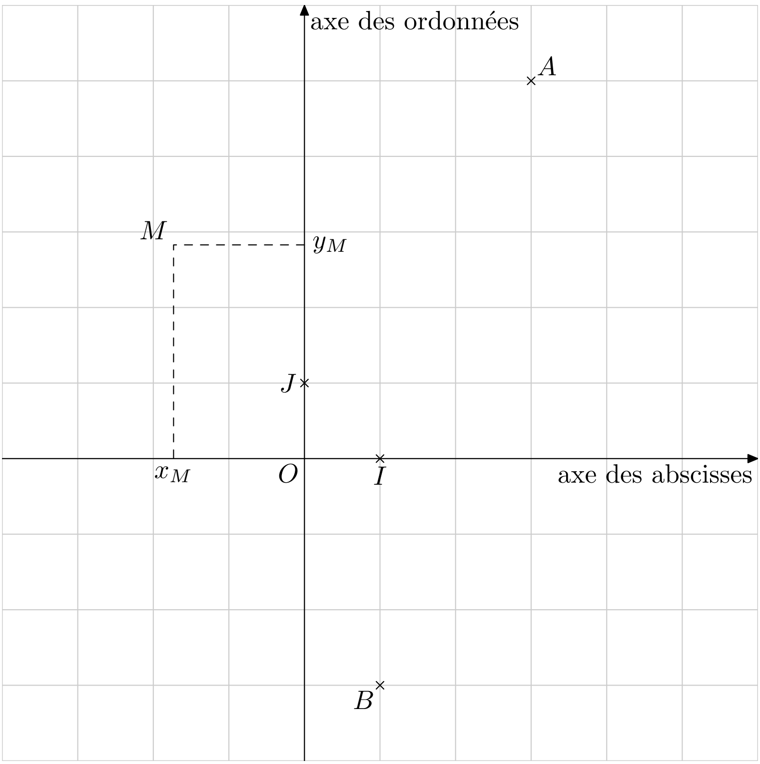
1 Coordonnées d'un point

Définition 1 *Deux axes gradués de même origine et perpendiculaires définissent* un repère orthogonal.

De plus, si les axes possèdent la même unité de longueur alors le repère est dit orthonormé*.*



Dans l'exemple ci-dessus, on dira que les coordonnées du point M sont (x_M, y_M), que celles du point A sont $(3; 5)$ et que celles du point B sont $(1; -3)$.

Propriété 1 *Dans un repère quelconque, soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors les coordonnées du point K, milieu du segment $[AB]$ sont*

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple Sur la figure ci-dessus, le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées

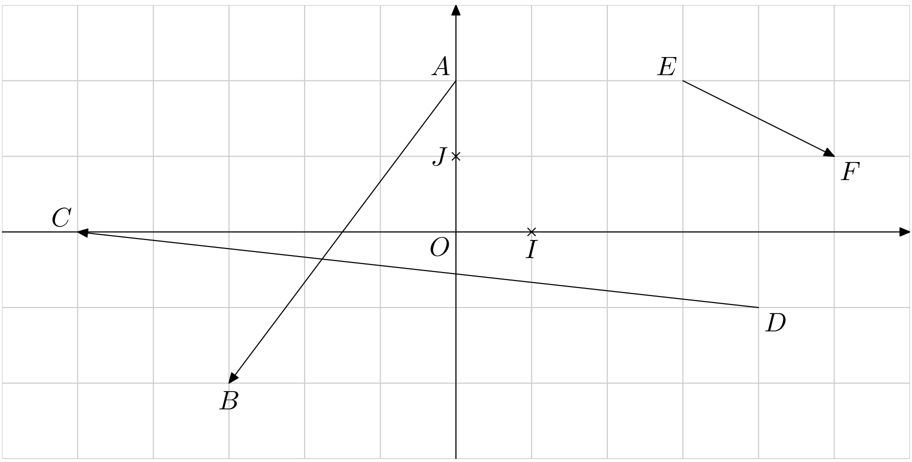
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$
$$x_K = \frac{3+1}{2} \qquad y_K = \frac{5+(-3)}{2}$$
$$x_K = \frac{4}{2} \qquad y_K = \frac{2}{2}$$
$$x_K = 2 \qquad y_K = 1$$

2 Coordonnées d'un vecteur

Propriété 2 *Dans un repère quelconque, soit E et F deux points de coordonnées respectives $(x_E ; y_E)$ et $(x_F ; y_F)$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont*

$$(x_F - x_E \,;\, y_F - y_E)$$

Exemples



Sur la figure ci-dessus, on a

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A) \qquad \overrightarrow{DC}(x_C - x_D \,;\, y_C - y_D)$$
$$\overrightarrow{AB}(-3-0 \,;\, -2-2) \qquad \overrightarrow{DC}(-5-4 \,;\, 0-(-1))$$
$$\overrightarrow{AB}(-3 \,;\, -4) \qquad \overrightarrow{DC}(-9 \,;\, 1)$$

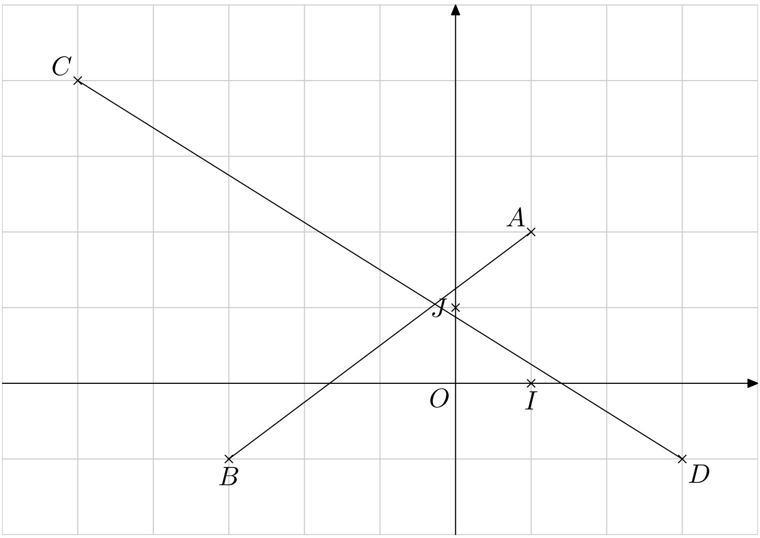
Vérification graphique Le déplacement de A à B correspond graphiquement à un déplacement horizontal de 3 unités dans le sens négatif suivi d'un déplacement vertical de 4 unités dans le sens négatif.

Propriété 3 *Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.*

3 Distance dans un repère orthonormé

Propriété 4 *Dans* **un repère orthonormé***, soit E et F deux points de coordonnées respectives $(x_E ; y_E)$ et $(x_F ; y_F)$. Alors, on a*

$$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 \quad \text{et} \quad EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$



Exemples Sur la figure ci-dessus, le repère est orthonormé : on a donc

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 & \qquad CD^2 &= (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 \\
AB^2 &= (-3 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 & CD^2 &= (3 - (-5))^2 + (-1 - 4)^2 \\
AB^2 &= (-4)^2 + (-3)^2 & CD^2 &= (3 + 5)^2 + (-5)^2 \\
AB^2 &= 16 + 9 & CD^2 &= 64 + 25 \\
AB^2 &= 25 & CD^2 &= 89 \\
AB &= 5 & CD &= \sqrt{89}
\end{aligned}$$

Remarques Les réponses sont données dans l'unité de longueur commune aux deux axes.

4 Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité choisie est le centimètre. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Placer les points $A(4;5)$, $B(0;-3)$ et $C(-6;0)$.
2. (a) Montrer que $AB = \sqrt{80}\,cm$, $AC = \sqrt{125}\,cm$ et $BC = \sqrt{45}\,cm$.
   On utilise la Propriété 4.

   (b) En déduire que ABC est un triangle rectangle. Préciser l'angle droit.
   On utilise la réciproque du Théorème de Pythagore.
3. (a) Construis le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

   (b) Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
   On démontre que $ABCD$ est un parallélogramme qui possède un angle droit.

   (c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
   On utilise la Propriété 2.

   (d) Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point D sont $(-2;8)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux donc leurs coordonnées sont égales.
4. (a) Calculer les coordonnées du point K milieu du segment $[AC]$.
   On utilise la Propriété 1.

   (b) Que représente le point K pour le quadrilatère $ABCD$?
   Pensez aux diagonales.