1 Fonctions linéaires

1.1 Vocabulaire

Définition 1 *Soit a un nombre quelconque « fixe ».*

Une fonction **linéaire** *associe à un nombre x quelconque le nombre $a \times x$. a s'appelle* le coefficient *de la fonction linéaire.*

On note le plus souvent une fonction par une lettre, f par exemple. On écrit alors $f(x) = ax$ et on lit f de x égal a fois x. *$f(x)$ s'appelle* l'image de x par la fonction f.

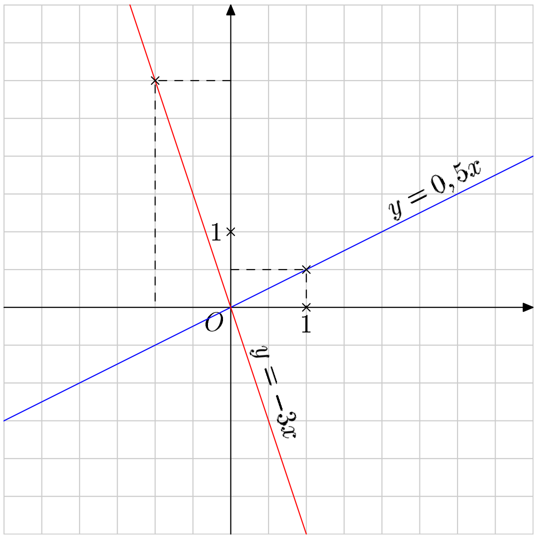
On peut également noter la fonction sous la forme

$$f : x \mapsto ax$$

1.2 Représentation graphique

Propriété 1 *Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. On dira alors que $y = ax$ est* une équation *de la droite et que a est le* coefficient directeur *de la droite.*

Exemples



Représenter graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 0.5x$ et g définie par $g(x) = -3x$.

f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique passe par l'origine du repère.
Je choisis $x = 1$, son image est $f(1) = 0,5 \times 1 = 0,5$. Je place le point de coordonnées $(1; 0,5)$.

g est une fonction linéaire donc sa représentation graphique passe par l'origine du repère.
Je choisis $x = -1$, son image est $g(-1) = -3 \times (-1) = 3$. Je place le point de coordonnées $(-1; 3)$.

2 Fonctions affines

2.1 Vocabulaire

Définition 2 *Soit a et b deux nombres quelconques « fixes ».*

Une fonction **affine** *associe à un nombre x quelconque le nombre $a \times x + b$.*

On note le plus souvent une fonction par une lettre, f par exemple. On écrit alors $f(x) = ax + b$ et on lit f de x égal a fois x plus b. *$f(x)$ s'appelle* l'image de x par la fonction f.

On peut également noter la fonction sous la forme

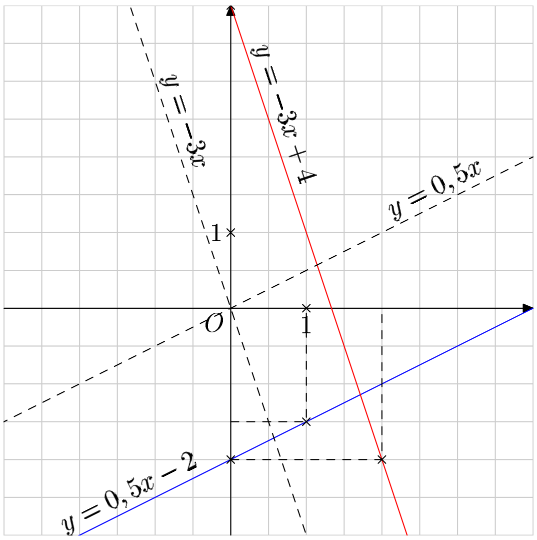
$$f : x \mapsto ax + b$$

Remarque : une fonction linéaire est un cas particulier d'une fonction affine avec $b = 0$.

2.2 Représentation graphique

Propriété 2 *Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$ et parallèle à la représentation graphique de la fonction linéaire associée $g : x \mapsto ax$. On dira alors que $y = ax+b$ est* une équation *de la droite.*
a s'appelle le coefficient directeur de la droite *et b s'appelle* l'ordonnée à l'origine.

Exemples



Représenter graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 0.5x - 2$ et g définie par $g(x) = -3x + 4$.
f est une fonction affine donc sa représentation graphique passe par le point de coordonnées $(0; -2)$.
Je choisis $x = 1$, son image est $f(1) = 0,5 \times 1 - 2 = -1,5$. Je place le point de coordonnées $(1; -1,5)$.

g est une fonction affine donc sa représentation graphique passe par le point de coordonnées $(0; 4)$.
Je choisis $x = 2$, son image est $g(2) = -3 \times (2) + 4 = -2$. Je place le point de coordonnées $(2; -2)$.

3 Applications des fonctions linéaires

Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité. Elle s'applique donc aux « pourcentages ».

Propriété 3 – *Prendre $t\%$ d'un nombre x, c'est multiplier ce nombre x par $\frac{t}{100}$.*
– *Augmenter un nombre x de $t\%$, c'est multiplier ce nombre x par $1+\frac{t}{100}$.*
– *Réduire un nombre x de $t\%$, c'est multiplier ce nombre x par $1-\frac{t}{100}$.*

4 Exercice

Un opérateur téléphonique propose à ses clients trois formules de facturation mensuelle des communications.
Formule 1 *: 0,12€ la minute.*
Formule 2 *: un abonnement fixe de 4,8€ et 0,04€ par minute.*
Formule 3 *: un forfait de 10€ pour $3\,h$ de communications.*

1/ *Calcule le montant des factures des communications selon les trois formules pour des durées de $35\,min$, de $1\,h\,20\,min$ et $2\,h\,45$* min.
On remarque que $1\,h\,20\,min = 80\,min$ et $2\,h\,45\,min = 165\,min$. On obtient le tableau suivant :

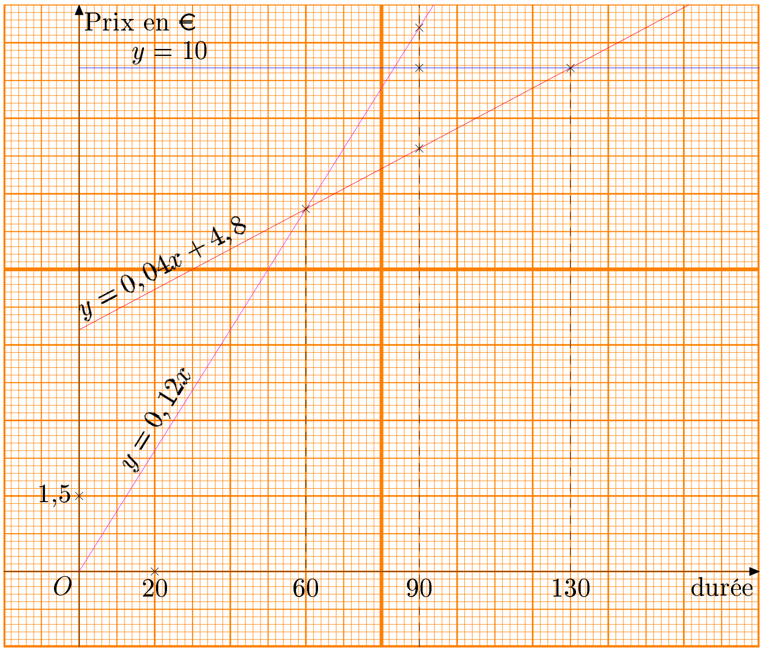
	$35\,min$	$1\,h\,20\,min$	$2\,h\,45\,min$
Formule 1	$0,12\times 35=4,2$	$0,12\times 80=9,6$	$0,12\times 165=19,8$
Formule 2	$0,04\times 35=1,4$ $1,4+4,8=6,2$	$0,04\times 80=3,2$ $3,2+4,8=8$	$0,04\times 165=6,6$ $6,6+4,8=11,2$
Formule 3	10	10	10

2/ *Cette question a pour but de rechercher la formule la plus avantageuse selon la durée des communications téléphoniques comprises entre 0 et 3 heures.*

(a) *Soit x la durée, en minutes, des communications.*
Exprime, en fonction de x, le coût des communications selon les différentes formules ; on appellera $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ les prix obtenus en appliquant respectivement la formules 1, la formule 2 et la formule 3.
On a donc :
- $f_1(x)=0,12\times x$.
- $f_2(x)=0,04\times x+4,8$ (il ne faut pas oublier l'abonnement.)
- $f_3(x)=10$ (on paie toujours la même chose quelque soit la durée de communications.)

(b) *Sur une feuille de papier millimétré, on considère un repère orthogonal. L'origine est placée en bas à gauche de la feuille. Sur l'axe horizontal, $1\,cm$ représente $20\,min$; sur l'axe vertical, $1\,cm$ représente 20€.*

Trace les représentations graphiques de f_1, f_2 et f_3 en se limitant au cas où $0 \leqslant x \leqslant 180$.



(c) *Utilise le graphique pour répondre aux questions suivantes :*

i. *Quelle est la formule la plus avantageuse pour $1\,h\,30\,\text{min}$?* Regardons les points des 3 droites d'abscisse $90\,min$: c'est la formule 2 qui est la plus avantageuse.

ii. *Pour quelle durée de communications les formules 1 et 2 ont-elles le même coût ?* On regarde l'abscisse du point d'intersection des droites représentant f_1 et f_2 : $60\,min$.

iii. *Pour quelles durées de communication la formule 3 est-elle la plus avantageuse ?* On regarde à partir de quelle durée la droite représentant f_3 est « en dessous » des deux autres droites : à partir de $130\,min$.

Remarque : Les résultats de la question 2c peuvent être retrouvés par le calculs.
- pour la question 2(c)i, en comparant $f_1(90)$, $f_2(90)$, $f_3(90)$;
- pour la question 2(c)ii, en résolvant l'équation $f_1(x) = f_2(x)$;
- pour la question 2(c)iii, en résolvant les inéquations $f_3(x) \leqslant f_1(x)$ et $f_3(x) \leqslant f_2(x)$.