1 Vocabulaire

- *Développer* une expression, c'est transformer tous les produits de cette expression en sommes.

  Propriété 1 *Si k, a, b, c, d sont 5 nombres quelconques alors*

  $$k \times (a+b) = k \times a + k \times b \qquad (a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

  Exemples d'application

  $$\begin{array}{lll} A = 2(x+3) & B = x(x-1) & C = 3(2x+5) \\ A = 2\times x + 2\times 3 & B = x\times x + x\times(-1) & C = 3\times 2x + 3\times 5 \\ A = 2x+6 & B = x^2 + (-x) & C = 6x+15 \\ & B = x^2 - x & \end{array}$$

  $$D = (x+2)(3x-1)$$

  $$D = x\times 3x + x\times(-1) + 2\times 3x + 2\times(-1)$$
  $$D = 3\times \underline{x\times x} - 1x + 6x - 2$$
  $$D = 3x^2 \underline{-1x + 6x} + 2$$
  $$D = 3x^2 + 5x + 2$$

  Remarque L'expression D a été développée puis *réduite*. Cela signifie que l'on a écrit cette expression sous la forme finale la plus simple possible.

- *Factoriser* une expression, c'est transformer toutes les sommes en produits.

  Propriété 2 *Si k, a, b, c, d sont 5 nombres quelconques alors*

  $$k \times a + k \times b = k \times (a+b) \qquad a\times c + a\times d + b\times c + b\times d = (a+b)\times(c+d)$$

  Exemples d'application

  $$\begin{array}{ll} A = \underline{(x+3)}(2x-3) + \underline{(x+3)}(2-x) & B = (1-x)(1+x) - (1+x)^2 \\ A = (x+3)\times[(2x-3)+(2-x)] & B = (1-x)\overline{(1+x)} - \overline{(1+x)}\times(1+x) \\ A = (x+3)(2x-3+2-x) & B = (1+x)[(1-x)-(1+x)] \\ A = (x+3)(x-1) & B = (1+x)(1-x-1-x) \\ & B = (1+x)\times(-2x) \\ & B = -2x(1+x) \end{array}$$

2 Egalités remarquables

Propriété 3 *Si a et b sont deux termes quelconques alors*

<u>Carré d'une somme de deux termes</u>

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{1}^{er}\textit{terme}}} + \underbrace{2 \times a \times b}_{\textit{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{2}^{e}\textit{terme}}}$$

<u>Carré d'une différence de deux termes</u>

$$(a-b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{1}^{er}\textit{terme}}} - \underbrace{2 \times a \times b}_{\textit{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{2}^{e}\textit{terme}}}$$

<u>Produit de la somme de deux termes par leur différence</u>

$$(a+b)(a-b) = \underbrace{a^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{1}^{er}\textit{terme}}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\textit{carré du}\\ \textit{2}^{e}\textit{terme}}}$$

Remarque On dit *remarquables* car il faut les *remarquer* dans une expression littérale.

Application n°1 : Développement

$A = (x+1)^2$	$B = (2x-3)^2$	$C = (4-x)(4+x)$
$A = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$	$B = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$	$C = 4^2 - x^2$
$A = x^2 + 2x + 1$	$B = 4x^2 - 12x + 9$	$C = 16 - x^2$

Application n°2 : Factorisation

$D = x^2 - 6x + 9$	$E = 9x^2 - 25$	$F = 4x^2 + 16x + 16$
$D = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$	$E = (3x)^2 - 5^2$	$F = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 4 + 4^2$
$D = (x-3)^2$	$E = (3x-5)(3x+5)$	$F = (2x+4)^2$

Remarque En pratique, pour <u>la factorisation</u>, c'est la 3^e égalité remarquable qui sert le plus souvent.

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

Application n°3 : Calcul mental

$102^2 = (100+2)^2$	$49^2 = (50-1)^2$	$37 \times 43 = (40-3) \times (40+3)$
$102^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2$	$49^2 = 50^2 - 2 \times 50 \times 1 + 1^2$	$37 \times 43 = 40^2 - 3^3$
$102^2 = 10\,204$	$49^2 = 2\,401$	$37 \times 43 = 1\,591$

Remarque A n'utiliser que pour le calcul mental. Une expression du type $(5-7)^2$ se calcule avec les règles de priorités de calculs habituelles : $(5-7)^2 = (-2)^2 = 4$.

3 Exercices d'application

Exercice 1 Soit les expressions

$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2 \qquad D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2$$

1/ Développer et réduire les expressions C et D.

$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2$$
$$C = 2x^2 - 3x + 4x - 6 + x^2 + 2x \times 2 + 2^2$$
$$C = 2x^2 + 1x - 6 + x^2 + 4x + 4$$
$$C = 3x^2 + 5x - 2$$

$$D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2$$
$$D = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 3^2 - \big((3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2\big)$$
$$D = 4x^2 + 4x + 9 - \big(9x^2 - 6x + 1\big)$$
$$D = 4x^2 + 4x + 9 - 9x^2 + 6x - 1$$
$$D = -5x^2 + 10x + 8$$

2/ Calculer la valeur de C lorsque $x = -1$.

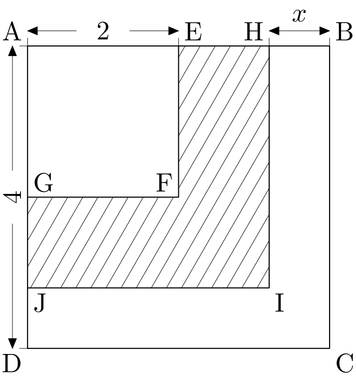
$$C = (-1+2) \times (2 \times (-1) - 3) + (-1+2)^2$$
$$C = 1 \times (-2-3) + (1)^2$$
$$C = 1 \times (-5) + 1$$
$$C = -5 + 1$$
$$C = -4$$

3/ Factoriser les expressions C et D.

$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)^2$$
$$C = (x+2)(2x-3) + (x+2)(x+2)$$
$$C = (x+2) \times [(2x-3) + (x+2)]$$
$$C = (x+2) \times (2x-3+x+2)$$
$$C = (x+2) \times (3x-1)$$

$$D = (2x+3)^2 - (3x-1)^2$$
$$D = ((2x+3) + (3x-1)) \times ((2x+3) - (3x+1))$$
$$D = (2x+3+3x-1) \times (2x+3-3x-1)$$
$$D = (5x+2) \times (-x+2)$$

Exercice 2



Dans la figure ci-contre $AEFG$, $AHIJ$ et $ABCD$ sont des carrés.

1/ Exprime en fonction de x la longueur AH. Déduis-en l'aire de $AHIJ$.

2/ Exprime en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ de la surface hachurée. On développera le résultat.

3/ Factorise l'expression $\mathcal{A}$.

4/ Calcule l'aire de la surface hachurée pour $x = 2$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

1/ Comme H apaprtient au segment $[AB]$, on a

$$AH = AB - HB$$
$$AH = 4 - x$$

On obtient alors

$$\mathcal{A}_{AHIJ} = AH^2$$
$$\mathcal{A}_{AHIJ} = (4-x)^2$$

2/

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{AHIJ} - \mathcal{A}_{AEFG}$$
$$\mathcal{A} = (4-x)^2 - AE^2$$
$$\mathcal{A} = (4-x)^2 - 2^2$$
$$\mathcal{A} = (4-x)^2 - 4$$
$$\mathcal{A} = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2 - 4$$
$$\mathcal{A} = 16 - 8x + x^2 - 4$$
$$\mathcal{A} = x^2 - 8x + 12$$

3/

$$\mathcal{A} = (4-x)^2 - 4$$
$$\mathcal{A} = (4-x)^2 - 2^2$$
$$\mathcal{A} = \big((4-x) - 2\big) \times \big((4-x) + 2\big)$$
$$\mathcal{A} = (4-x-2) \times (4-x+2)$$
$$\mathcal{A} = (2-x)(6-x)$$

4/ Pour $x = 2$, on obtient

$$\mathcal{A} = (2-x)(6-x)$$
$$\mathcal{A} = (2-2)(6-2)$$
$$\mathcal{A} = 0 \times 4$$
$$\mathcal{A} = 0$$

On pouvait s'attendre au résultat car si $x = 2$ alors les points H et E sont confondus et la surface hachurée n'existe pas.