Correction du Brevet Blanc n°2

Activités Numériques

Exercice n°1

1. *On donne*

$$A = \left(-4 + 3 \times \frac{2}{7}\right) \div \frac{3}{14} \qquad B = \frac{4 - (2-5)^2}{4+5}$$

Calculer les nombres A et B. Ecrire les étapes et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \left(-4 + 3 \times \frac{2}{7}\right) \div \frac{3}{14}$$
$$A = \left(-4 + \frac{6}{7}\right) \div \frac{3}{14}$$
$$A = \left(\frac{-28}{7} + \frac{6}{7}\right) \div \frac{3}{14}$$
$$A = \frac{-22}{7} \div \frac{3}{14}$$
$$A = \frac{-22}{7} \times \frac{14}{3}$$
$$A = \frac{-22 \times 2 \times 7}{7 \times 3}$$
$$A = -\frac{44}{3}$$

$$B = \frac{4 - (2-5)^2}{4+5}$$
$$B = \frac{4 - (-3)^2}{9}$$
$$B = \frac{4-9}{9}$$
$$B = -\frac{5}{9}$$

2. *On donne*

$$C = 5\sqrt{20} + \sqrt{45} \qquad D = 5\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt{5}$$

Calculer les nombres C et D en donnant les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible.

$$C = 5\sqrt{20} + \sqrt{45}$$
$$C = 5\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5}$$
$$C = 5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$
$$C = 5 \times 2 \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$
$$C = 10\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$
$$C = 7\sqrt{5}$$

$$D = 5\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt{5}$$
$$D = 5\sqrt{900} \times \sqrt{5}$$
$$D = 5 \times 30 \times \sqrt{5}$$
$$D = 150\sqrt{5}$$

3. *Calculer E^2 sachant que $E = 4 - \sqrt{5}$.*

$$E^2 = \left(4 - \sqrt{5}\right)^2$$
$$E^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$E^2 = 16 - 8\sqrt{5} + 5$$
$$E^2 = 21 - 8\sqrt{5}$$

Exercice n°2

1. *On donne $F = (4x-3)^2 - (x+3)(3-9x)$.*

(a) *Développer et réduire $(4x-3)^2$.*

$$(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$$
$$(4x-3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$$

(b) *Montrer que $F = (5x)^2$.*

$$F = (4x-3)^2 - (x+3)(3-9x)$$
$$F = 16x^2 - 24x + 9 - \left(3x - 9x^2 + 9 - 27x\right)$$
$$F = 16x^2 - 24x + 9 - 3x + 9x^2 - 9 + 27x$$
$$F = 25x^2$$
$$F = (5x)^2$$

(c) *Trouver les valeurs de x pour lesquelles $F = 125$.*

On a

$$F = (5x)^2$$
$$(5x)^2 = 125$$

Comme 125 est strictement positif, l'équation admet deux solutions

$$5x = \sqrt{125} \qquad 5x = -\sqrt{125}$$
$$5x = \sqrt{25 \times 5} \qquad 5x = -\sqrt{25 \times 5}$$
$$5x = 5\sqrt{5} \qquad 5x = -5\sqrt{5}$$
$$x = \sqrt{5} \qquad x = -\sqrt{5}$$

Donc les solutions de l'équation $F = 125$ sont $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

2. *On donne $C = (3x-2)^2 - 25$.*

(a) *Développer et réduire C.*

$$C = (3x-2)^2 - 25$$
$$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 - 25$$
$$C = 9x^2 - 12x + 4 - 25$$
$$C = 9x^2 - 12x - 21$$

(b) *Factoriser C.*

$$C = (3x-2)^2 - 25$$
$$C = (3x-2)^2 - 5^2$$
$$C = (3x - 2 - 5) \times (3x - 2 + 5)$$
$$C = (3x-7) \times (3x+3)$$
$$C = (3x-7) \times 3 \times (x+1)$$
$$C = 3(3x-7)(x+1)$$

(c) *Résoudre l'équation $(3x-7)(x+1) = 0$.*

C'est une équation-produit donc

$$3x - 7 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + 1 = 0$$
$$3x = 7 \qquad\qquad x = -1$$
$$x = \frac{7}{3}$$

Les solutions de l'équation $(3x-7)(x+1) = 0$ sont $x = \frac{7}{3}$ et $x = -1$.

Exercice n°3*Pour équiper une salle de réunion, M. Dupont achète des chaises et des tabourets. Chaque chaise coûte 30€ et chaque tabouret 20€. Il paie au total 1 030€.*

Il a acheté 6 chaises de plus que de tabourets.

Quel est le nombre de chaises et le nombre de tabourets achetés par M.Dupont ?

Soit x le nombre de tabourets : par conséquent, $x+6$ est le nombre de chaises. On obtient alors

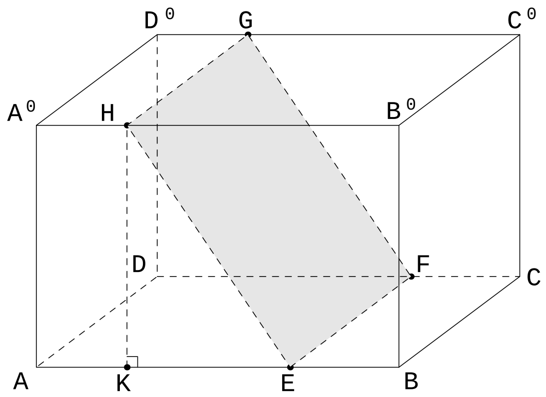
$$\underbrace{20 \times x}_{\text{prix des tabourets}} + \underbrace{30 \times (x+6)}_{\text{prix des chaises}} = \underbrace{1\,030}_{\text{prix total}}$$
$$20x + 30x + 180 = 1\,030$$
$$50x + 180 = 1\,030$$
$$50x = 1\,030 - 180$$
$$50x = 850$$
$$x = \frac{850}{50}$$
$$x = 17$$

Le nombre de tabourets est de 17 et le nombre de chaises est de 17+6 c'est-à-dire 23.

Activités Géométriques

<u>Exercice n°1</u>*Le parallélèpipède rectangle de la figure ci-dessous a été coupé par un plan parallèle à l'arête* $[BC]$.

On donne $EF = 25\,cm$, $HK = 20\,cm$, $KE = 15\,cm$.

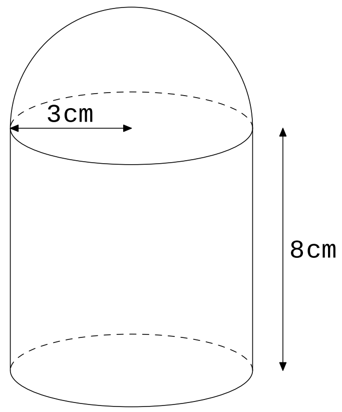


1. *Quelle est la nature de la section plane EFGH ?*
   D'après l'énoncé, la section est obtenue par la coupe du parallélèpipède rectangle par un plan parallèle à l'arête $[BC]$. Donc la section plane $EFGH$ est un rectangle.
2. *Calculer HE.*
   Dans le triangle EHK, rectangle en K, le théorème de Pythagore permet d'écrire
   $$EH^2 = EK^2 + KH^2$$
   $$EH^2 = 15^2 + 20^2$$
   $$EH^2 = 225 + 400$$
   $$EH^2 = 625$$
   $$EH = \sqrt{625}$$
   $$EH = 25\,cm$$
   La longueur HE mesure $25\,cm$.
3. *Que peut-on déduire des questions précédentes pour le quadrilatère EFGH ? Justifier la réponse.*
   D'après la question 1, on sait que $EFGH$ est un rectangle. D'après la question 2, on sait que $EH = 25\,cm$ donc $EH = EF$.
   On obtient donc un rectangle possèdant deux côtés consécutifs de même longueur : $EFGH$ est un carré.

<u>Exercice n°2</u>$ABCD$ *un quadrilatère tel que* $\widehat{ABC} = 90°$, $AD = 10\,cm$, $CD = 8\,cm$, $AB = 3,6\,cm$ *et* $BC = 4,8\,cm$.

1. *Réaliser une figure en grandeur réelle.*
2. *Calculer la longueur AC et montrer que le triangle ACD est rectangle.*
   Dans le triangle ABC, rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
   $$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
   $$AC^2 = 3,6^2 + 4,8^2$$
   $$AC^2 = 12,96 + 23,04$$
   $$AC^2 = 36$$
   $$AC = \sqrt{36}$$
   $$AC = 6\,cm$$
   Dans le triangle ACD, $[AD]$ est le plus grand côté.
   $$\left.\begin{array}{l} AD^2 = 10^2 = \underline{100} \\ AC^2 + CD^2 = 6^2 + 8^2 = \underline{100} \end{array}\right\} AD^2 = AC^2 + CD^2$$
   Comme $AD^2 = AC^2 + CD^2$, alors le triangle ACD est rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pyhtagore.
3. *Calculer une valeur arrondie au degré de l'angle* $\widehat{BAC}$.
   Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a
   $$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$$
   $$\cos\widehat{BAC} = \frac{3,6}{6}$$
   $$\widehat{ABC} \simeq 53°$$
4. *Montrer que le triangle ABC est une réduction du triangle ACD dont on précisera le coefficient de réduction.*
   $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3,6}{6} = 0,6 \\ \\ \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{4,8}{8} = 0,6 \\ \\ \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{6}{10} = 0,6 \end{array}\right\} \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$$
   Comme $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{AD}$ alors le triangle ABC est une réduction du triangle ACD et le coefficient de réduction est 0,6.

<u>Exercice n°3</u>*Une boîte est formée d'un cylindre de hauteur* $8\,cm$, *surmonté d'une demi-sphère de rayon* $3\,cm$.



1. *Calculer le volume* $\mathcal{V}$ *de la boîte en* cm^3. *On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au* mm^3.
   Soit $\mathcal{V}$ le volume de la boîte, $\mathcal{V}_1$ le volume du cylindre et $\mathcal{V}_2$ le volume de la demi-sphère.
   $$\mathcal{V}_1 = \pi \times R^2 \times h \qquad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$
   $$\mathcal{V}_1 = \pi \times 3^2 \times 8 \qquad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$
   $$\mathcal{V}_1 = 72\pi\,cm^3 \qquad \mathcal{V}_2 = 18\pi\,cm^3$$
   Donc
   $$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$
   $$\mathcal{V} = 72\pi + 18\pi$$
   $$\mathcal{V} = 90\pi\,cm^3$$
   $$\mathcal{V} \simeq 282,743\,cm^3$$
2. *Cette boîte est agrandie avec un coefficient* $k = 2$.
   Calculer le volume $\mathcal{V}'$ *de la boîte agrandie en* cm^3. *On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au* mm^3.
   On obtient
   $$\mathcal{V}' = 2^3 \times \mathcal{V}$$
   $$\mathcal{V}' = 8 \times 90\pi$$
   $$\mathcal{V}' = 720\pi\,cm^3$$
   $$\mathcal{V}' \simeq 2\,261,947\,cm^3$$

Problème

Première Partie *EFG est un triangle isocèle en E tel que $FG = 5\,cm$ et $EG = 6\,cm$.*

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de diamètre $[EG]$ coupe le segment $[FG]$ en K.

1. *Réaliser la figure en vraie grandeur sur la feuille blanche fournie.*
2. (a) *Quelle est la nature du triangle EKG ? Justifier la réponse.*
   Le point K appartient au cercle de diamètre $[EG]$ donc le triangle EKG est rectangle en K.

   (b) *Démontrer que K est le milieu du segment $[FG]$.*
   Comme le tiangle EFG est isocèle en E alors le point E appartient à la médiatrice du segment $[FG]$. De plus, la droite (EK) est perpendiculaire à la droite (FG). Donc la droite (EK) est la médiatrice du segment $[FG]$. Par conséquent, K est le milieu du segment $[FG]$.

   (c) *Calculer la valeur exacte de la longueur EK. Donner une valeur approchée à $1\,mm$ près.*
   Comme K est le milieu du segment $[FG]$ alors $FK = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{5}{2} = 2,5\,cm$.
   Dans le triangle EKG, rectangle en K, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned} EG^2 &= EK^2 + KG^2 \\ 6^2 &= EK^2 + 2,5^2 \\ 36 &= EK^2 + 6,25 \\ EK^2 &= 36 - 6,25 \\ EK^2 &= 29,75 \\ EK &= \sqrt{29,75} \\ EK &\simeq 5,5\,cm \end{aligned}$$

   La longueur EK mesure environ $5,5\,cm$.
3. *Soit S le symétrique du point K par rapport au point O.*

   (a) *Placer le point S sur la figure.*

   (b) *Démontrer que le quadrilatère $ESGK$ est un rectangle.*
   Comme S est le symétrique du point K par rapport au point O alors le point O est le milieu du segment $[KS]$.
   Comme O est le centre du cercle de diamètre $[AG]$ alors le point O est le milieu du segment $[EG]$.
   Donc les diagonales du quadrilatère $ESGK$ ont le même milieu O : $ESGK$ est alors un parallélogramme.
   De plus, le parallélogramme $ESGK$ possède un angle droit (d'après la question 2.a.) : $ESGK$ est donc un rectangle.

Deuxième Partie *Compléter la figure en placant un point P, distinct du point O, sur le segment $[EG]$. Tracer la parallèle à la droite (FG) passant par P : elle coupe la droite (EF) en R.*

On nomme x la longueur du segment $[EP]$ exprimée en centimètres.

1. *Préciser, sans aucune justification, la nature du triangle EPR.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le triangle } EFG \text{ est coupé par un droite parallèle à la droite } (FG) \text{ donc le triangle } ERP \\ \text{est une réduction du triangle } EFG \text{ et de rapport } k. \text{ Donc} \\ EP = k \times EG = k \times \underbrace{EF}_{\text{car } EF = EG} = ER : \text{le triangle } ERP \text{ est isocèle en } E. \end{array} \right.$$

   Le triangle EPR est isocèle en E.
2. *Démontrer que*
$$PR = \frac{5}{6}x$$
   Dans le triangle EFG, P est un point de la droite (EG), R est un point de la droite (EF) tels que les droites (RP) et (FG) soient parallèles. Alors le Théorème de Thalès permet d'écrire
$$\begin{aligned} \frac{EP}{EG} &= \frac{ER}{EF} = \frac{PR}{GF} \\ \frac{x}{6} &= \frac{x}{6} = \frac{PR}{5} \end{aligned}$$
   On utilise $\dfrac{x}{6} = \dfrac{PR}{5}$ d'où $PR = \dfrac{5 \times x}{6}$ ou $PR = \dfrac{5}{6}x$.
3. *Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle EPR.*
   Soit p le périmètre du triangle EPR.
$$\begin{aligned} p &= EP + PR + RE \\ p &= x + \frac{5}{6}x + x \\ p &= \frac{6}{6}x + \frac{5}{6}x + \frac{6}{6}x \\ p &= \frac{17}{6}x \end{aligned}$$
4. *Démontrer que le périmètre $\mathcal{P}$ du trapèze $RPGF$ est*
$$\mathcal{P} = \frac{-7x}{6} + 17$$
   Comme P appartient au segment $[EG]$ donc
$$\begin{aligned} EG &= EP + PG \\ 6 &= x + PG \\ PG &= 6 - x \end{aligned}$$
   On a $FR = PG = 6 - x$.
   Donc
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= RP + PG + GF + FR \\ \mathcal{P} &= \frac{5}{6}x + 6 - x + 5 + 6 - x \\ \mathcal{P} &= \frac{5}{6}x - \frac{6}{6}x - \frac{6}{6}x + 6 + 5 + 6 \\ \mathcal{P} &= -\frac{7}{6}x + 17 \end{aligned}$$
5. *Peut-on trouver une position du point P sur le segment $[EG]$ pour laquelle le triangle EPR et le trapèze $RPGF$ aient le même périmètre ? Justifier la réponse.*
   Il faut obtenir
$$\begin{aligned} p &= \mathcal{P} \\ \frac{17}{6}x &= -\frac{7}{6}x + 17 \\ \frac{17}{6}x + \frac{7}{6}x &= 17 \\ \frac{24}{6}x &= 17 \\ 4x &= 17 \\ x &= \frac{17}{4} \\ x &= 4,25 \end{aligned}$$
   Si P est situé sur le segment $[EG]$ tel que $EP = 4,25\,cm$ alors le triangle EPR et le trapèze $RPGF$ ont le même périmètre.